Beiträge zur Ergodentheorie Gaußscher Prozesse

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt
von
Horst Gundel
aus Bremen

Göttingen 1976

Beiträge zur Ergodentheorie Gaußscher Prozesse

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt
von
Horst Gundel
aus Bremen

Göttingen 1976

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

D 7
Referent: Prof.Dr. U.Krengel
Korreferent: Prof.Dr. M.Denker
Tag der mündlichen Prüfung: 4.11.1976

Inhalt

Einleitung

Kapitel I: Mischung bei Gruppen von Transformationen und die Anwendung auf Gaußsche Prozesse... 1

§ 1 Schwache und starke Mischung von Gruppen von Transformationen..... 1

§ 2 Schwach und stark mischende Gaußsche Prozesse..... 19

Kapitel II: Die $\bar{\rho}$-Metrik..... 31

§ 1 Die Definition der $\bar{\rho}$-Metrik und einige Ergebnisse..... 31

§ 2 Der Abstand gestörter Prozesse..... 41

§ 3 Berechnung des Abstandes für eine Klasse von Prozessen..... 47

§ 4 Anwendungen von Satz 14..... 58

Literaturverzeichnis..... 72

Einleitung

Im ersten Kapitel dieser Arbeit führe ich die Begriffe 'schwache Mischung' und 'starke Mischung' für abelsche Gruppen von maßtreuen Transformationen ein. Der Begriff 'schwache Mischung' wird in Beziehung zur Stetigkeit von Spektralmaßen gebracht. Mit diesem Ziel wird ein mit dem Normergodensatz zusammenhängender Satz bewiesen und ein Mittel eingeführt, das die Rolle des starken Cesàromittels bei den ganzen Zahlen übernimmt.

Anschließend werden abelsche Gruppen von Gaußschen Automorphismen untersucht. Vorbereitend wird eine Spektraldarstellung für schwach stationäre Prozesse, deren Parametermenge eine abelsche Gruppe ist, bewiesen, und das mehrfache Wienerintegral wird auf abelsche Gruppen von Gaußschen Automorphismen, deren Parametergruppe mit der diskreten Topologie versehen wird, unter geringen Zusatzvoraussetzungen an das Spektralmaß verallgemeinert.

Als Anwendung ergibt sich bei abelschen Gruppen von Gaußschen Automorphismen die Äquivalenz von Ergodizität, schwacher Mischung und Stetigkeit des Spektralmaßes. Die Eigenschaft 'starke Mischung' ist für unendliche abelsche Gruppen unter der gleichen Zusatzvoraussetzung äquivalent dazu, daß die Fouriertransformierte des Spektralmaßes im Unendlichen verschwindet.

Das zweite Kapitel der Arbeit behandelt die $\bar{\rho}$-Metrik für stationäre Prozesse mit diskreter Zeit und Werten in einem

polnischen Raum. Zuerst werden einige Eigenschaften der $\bar{\rho}$-Metrik gebracht, und sie wird in Spezialfällen ausgerechnet. Als Anwendung wird untersucht, wie sich der Abstand zweier Prozesse ändert, wenn sie beide durch die gleiche Störung gestört werden.

Dann wird für eine Klasse von Prozessen, die die Gaußschen Prozesse echt umfaßt, der zur Abstandsfunktion $\rho^2(x,y) = |x-y|^2$ gehörige Abstand ausgerechnet. Damit wird eine Vermutung von Gray, Neuhoff und Shields [3] widerlegt. Es wird explizit ein Wahrscheinlichkeitsmaß angegeben, mit dem der Ausdruck in der Definitionsformel für den Abstand minimal ist. Sind die Prozesse Gaußsch, ist auch dieses Maß die Verteilung eines zweidimensionalen stationären Gaußschen Prozesses.

Mit der Formel für den Abstand erhalte ich als weitere Ergebnisse, daß die mischenden Gaußschen Automorphismen nicht separabel sind. Die ergodischen, die mischenden Gaußschen Automorphismen und die Gaußschen Bernoullishifts sind abgeschlossen. Dicht in der Menge aller Gaußschen Automorphismen sind die nichtergodischen Gaußschen Automorphismen. Zum Abschluß werden gestörte Gaußsche Prozesse behandelt, und es erweist sich, daß man nicht alle Paare von mischenden Gaußschen Automorphismen so durch Gaußsche Bernoullishifts stören kann, daß der Abstand sehr klein wird.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Professor Krengel für Anregung und Unterstützung bei dieser Arbeit danken.

Kapitel I: Mischung bei Gruppen von Transformationen und die Anwendung auf Gaußsche Prozesse

§ 1 Schwache und starke Mischung von Gruppen von Transformationen

In diesem Paragraphen sollen die Begriffe schwache und starke Mischung für abelsche Gruppen von maßtreuen Transformationen definiert werden. Dazu wird ein für die ganzen Zahlen bekannter Satz auf abelsche Gruppen ausgedehnt (Satz 8). Zur Vorbereitung wird ein Satz bewiesen, der die Grenzwertaussage im Normergodensatz auf abelsche Gruppen von Kontraktionen in einem Hilbertraum überträgt, und es wird ein Mittel für reelle Funktionen auf einer Gruppe eingeführt, das zum Teil gleiche Eigenschaften wie das starke Cesàromittel bei den ganzen Zahlen hat.

Sei H Hilbertraum und G multiplikativ geschriebene abelsche Gruppe.

$\{V_t : t \in G\}$ sei eine notwendig abelsche Gruppe von Kontraktionen in H mit Verknüpfung $V_s V_t = V_{st}$ $(s,t \in G)$.

$$K := \{ \sum_{\kappa=1}^{k} \alpha_\kappa V_{s_\kappa} : k \in \mathbb{N},\ s_\kappa \in G,\ \alpha_\kappa \geq 0 \quad (1 \leq \kappa \leq k),\ \sum_{\kappa=1}^{k} \alpha_\kappa = 1 \}$$

ist die konvexe Hülle von $\{V_t : t \in G\}$.

Für $t_1,\ldots,t_k \in G$ bezeichne $(t_1,\ldots,t_k)$ die von $\{t_1,\ldots,t_k\}$ erzeugte Untergruppe von G.

$I := \{M \in K : \exists\ t_1,\ldots,t_n \in G$ derart, daß $(t_1,\ldots,t_n)$

direktes Produkt von $(t_1),\ldots,(t_n)$ ist,

und $\exists\, l \in \mathbb{N}$, so daß $M = l^{-n} \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{l-1} V_{t_1^{i_1}\ldots t_n^{i_n}}\}$

$\forall\, f \in H$ sei $K(f)$ der Norm - oder, was dasselbe ist, der schwache Abschluß von $\{Mf : M \in K\}$ und $I(f)$ der Normabschluß von $\{Mf : M \in I\}$.

$F := \{h \in H : V_t h = h \quad \forall\, t \in G\}$

Nach dem Normergodensatz enthält für jedes $f \in H$ $K(f) \cap F$ genau ein Element $\bar{f}$. (Jacobs [5], 1, Seite 87ff)

Satz 1:

$\forall\, f \in H \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, t_1,\ldots,t_n \in G$ derart, daß $(t_1,\ldots,t_n)$ direktes Produkt von $(t_1),\ldots,(t_n)$ ist, und $\exists\, l_o \in \mathbb{N}$, so daß mit $M_l = l^{-n} \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{l-1} V_{t_1^{i_1}\ldots t_n^{i_n}} \quad \forall\, l > l_o$

gilt $\|M_l f - \bar{f}\| < \varepsilon$.

Insbesondere ist $I(f) \cap F = K(f) \cap F$.

Beweis:

Sei $f \in H$, $\varepsilon > 0$. Ist $f = 0$, so ist alles klar. Sei $f \neq 0$.

$\exists\, M \in K$, $M = \sum_{\kappa=1}^{k} \alpha_\kappa V_{s_\kappa}$ so daß $\|Mf - \bar{f}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ und

$\exists\, t_1,\ldots,t_n \in G$ so daß $(s_1,\ldots,s_k)$ direktes Produkt von $(t_1),\ldots,(t_n)$ ist.

Damit läßt sich M so darstellen:

$$M = \sum_{k_1,\ldots,k_n=-r}^{r} \beta_{k_1,\ldots,k_n} V_{t_1^{k_1}\cdots t_n^{k_n}} \quad \text{mit } r \in \mathbb{N}, \beta_{k_1,\ldots,k_n} \neq 0$$

$$\text{und} \sum_{k_1,\ldots,k_n=-r}^{r} \beta_{k_1,\ldots,k_n} = 1.$$

Da $\bar{f} \in F$ und $V_{t_1^r \ldots t_n^r}$ Kontraktion ist, erhält man

$$\| V_{t_1^r \ldots t_n^r} Mf - \bar{f} \| = \| V_{t_1^r \ldots t_n^r} Mf - V_{t_1^r \ldots t_n^r} \bar{f} \| \leq \| Mf - \bar{f} \| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$M' := V_{t_1^r \ldots t_n^r}$ $M \in K$ hat eine Darstellung

$$M' = \sum_{k_1,\ldots,k_n=o}^{m} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} V_{t_1^{k_1} \ldots t_n^{k_n}}$$

mit $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_{k_1,\ldots,k_n} \geq 0$

und $\sum_{k_1,\ldots,k_n=o}^{m} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} = 1$,

und es gilt $\| M'f - \bar{f} \| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Definiere $\forall\, l \in \mathbb{N}$

$$M_l := l^{-n} \sum_{i_1,\ldots,i_n=o}^{l-1} V_{t_1^{i_1} \ldots t_n^{i_n}} \in I$$

Behauptung:

$\lim_{l \to \infty} \| M_l - M'M_l \| = 0.$

Sei $l > m$. Dann ist

$\| M_l - M'M_l \|$

$$= l^{-n} \Big\| \sum_{i_1,\ldots,i_n=o}^{l-1} V_{t_1^{i_1} \ldots t_n^{i_n}} - \sum_{k_1,\ldots,k_n=o}^{m} \sum_{i_1,\ldots,i_n=o}^{l-1} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} V_{t_1^{i_1+k_1} \ldots t_n^{i_n+k_n}} \Big\|$$

$$= l^{-n} \Big\| \sum_{j_1,\ldots,j_n=o}^{m-1} \Big(1 - \sum_{\substack{k_p=o \\ p=1,\ldots,n}}^{j_p} \alpha_{k_1,\ldots,k_n}\Big) V_{t_1^{j_1} \ldots t_n^{j_n}}$$

$$+ \sum_{j_1,\ldots,j_n=m}^{l-1} \Big(1 - \sum_{k_1,\ldots,k_n=o}^{m} \alpha_{k_1,\ldots,k_n}\Big) V_{t_1^{j_1} \ldots t_n^{j_n}}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\pi \in S_n} \sum_{j_{\pi(1)}, \ldots, j_{\pi(k)}=0}^{m-1} \sum_{j_{\pi(k+1)}, \ldots, j_{\pi(n)}=m}^{l-1}$$

$$\left(1 - \sum_{\substack{k_p=0 \\ k_p \le m}}^{j_p} \alpha_{k_1, \ldots, k_n}\right) V_{t_1^{j_1} \ldots t_n^{j_n}}$$

$$p=1, \ldots, n$$

$$+ \sum_{j_1, \ldots, j_n=1}^{l+m-1} \left(- \sum_{\substack{k_p=j_p-(l-1) \\ k_p \le m \\ p=1, \ldots, n}}^{j_p} \alpha_{k_1, \ldots, k_n}\right) V_{t_1^{j_1} \ldots t_n^{j_n}}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{\pi \in S_n} \sum_{j_{\pi(1)}, \ldots, j_{\pi(k)}=0}^{l-1} \sum_{j_{\pi(k+1)}, \ldots, j_{\pi(n)}}^{l+m-1} = 1$$

$$\left(- \sum_{\substack{0 \le k_{\pi(p)} \le j_{\pi(p)} \\ p = 1, \ldots, k \\ j_{\pi(q)} \ge k_{\pi(q)} \ge j_{\pi(q)} - (l-1) \\ q = k+1, \ldots, n \\ k_1, \ldots, k_n \le m}} \alpha_{k_1, \ldots, k_n}\right) V_{t_1^{j_1} \ldots t_n^{j_n}} \Big\| ,$$

wobei S_n die n-te Permutationsgruppe ist. Die Summanden werden der Reihe nach mit I,II,III,IV,V bezeichnet. Es gilt

$$\|I\| \le m^n$$

$$II = 0$$

$$\|III\| \le n! \sum_{k=1}^{n-1} m^k (1-m)^{n-k} \le n!(n-1)\, m^{n-1}\, l^{n-1}$$

$$\|IV\| \le m^n$$

$$\|V\| \le n! \sum_{k=1}^{n-1} l^k\, m^{n-k} \le n!(n-1)\, m^{n-1}\, l^{n-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{l\to\infty} \| M_l - M'M_l \| = 0 .$$

Damit erhält man:

$$\exists\, l_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, l \geq l_0 : \| M_l - M'M_l \| < \frac{\varepsilon}{2\|f\|}$$

und es gilt $\forall\, l \geq l_0$

$$\begin{aligned} \| M_l f - \bar{f} \| &\leq \| M_l f - M'M_l f \| + \| M'M_l f - \bar{f} \| \\ &= \| M_l f - M'M_l f \| + \| M'M_l f - M_l \bar{f} \| \\ &\leq \| M_l - M'M_l \| \cdot \| f \| + \| M'f - \bar{f} \| < \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Ist G endlich erzeugte abelsche Gruppe, so hängt die Wahl von $t_1,\ldots,t_n$ im Beweis von Satz 1 nicht von ε ab. Deswegen gilt das

Korollar: Ist G endlich erzeugte abelsche Gruppe, gibt es also $t_1,\ldots,t_n \in G$, so daß G direktes Produkt von $(t_1),\ldots,(t_n)$ ist, und wird $M_l = l^{-n} \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{l-1} V_{t_1^{i_1}\ldots t_n^{i_n}}$ $(l \in \mathbb{N})$ gesetzt, dann ist für jedes $f \in H$

$$\lim_{l\to\infty} \| M_l f - \bar{f} \| = 0.$$

Im weiteren sei G lokalkompakte abelsche Gruppe und Γ die duale Gruppe von G. $\forall\, t \in G \quad \forall\, \gamma \in \Gamma$ sei $(t,\gamma) = \gamma(t)$. Für topologische Räume E sei $\mathfrak{B}(E)$ die Borelsche σ-Algebra in E. $M(\Gamma)$ seien die regulären endlichen Borelmaße auf Γ. $\hat{\varphi}$ für ein bezüglich des Haarmaßes auf Γ integrierbares komplexes φ und $\hat{\mu}$ für $\mu \in M(\Gamma)$ bezeichnen die Fouriertransformierten; dabei wird ein Haarmaß auf Γ fest ausgewählt. dt bedeute das Haarmaß auf G, das zu dem festen Haarmaß auf Γ so normiert ist, daß die Inversionsformel gilt. (Rudin [11], Seite 22).

Sei $(W_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine Umgebungsbasis der 1 in Γ und $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine Familie von reellen stetigen nichtnegativ-definiten Funktionen auf Γ. Jedes φ_α habe kompakten Träger in W_α, ferner sei $\varphi_\alpha(1) = 1$, $\hat{\varphi}_\alpha$ reell und $\hat{\varphi}_\alpha \geq 0$.
(Zur Existenz einer solchen Familie siehe [11], Seite 23).

Aus dem Inversionssatz folgt $\int_G \hat{\varphi}_\alpha(t)dt = \varphi_\alpha(1) = 1 \quad \forall \alpha \in I$.
Für alle reellen meßbaren nichtnegativen Funktionen ψ auf G kann also $M_\alpha \psi := \int_G \hat{\varphi}_\alpha(t)\,\psi(t)\,dt$ als Mittel aufgefaßt werden.

Definition 2:

Sei $a \in \mathbb{R}$ und ψ reelle meßbare nichtnegative Funktion auf G. Die Aussage $\lim_\alpha M_\alpha \psi = a$ ist definiert durch:

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists$ Umgebung W der 1 in Γ, so daß $\forall\, \alpha \in I$ mit $W_\alpha \subset W$ gilt $|M_\alpha \psi - a| < \varepsilon$.

Satz 3: (Rudin [11], Seite 118)

$\forall\, \mu \in M(\Gamma)$ gilt

$$\lim_\alpha M_\alpha |\hat{\mu}|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} \mu(\{\gamma\})^2 \quad .$$

Lemma 4:

$\forall \mu \in M(\Gamma) \quad \forall\, s \in G$ gilt

$$\lim_\alpha \int_G \hat{\varphi}_\alpha(t)|\hat{\mu}(st)|^2 dt = \sum_{\gamma\in\Gamma} \mu(\{\gamma\})^2.$$

Beweis:

$\sigma := \mu * \tilde{\mu}$ wobei $\forall\, B \in \mathcal{B}(\Gamma)\ \tilde{\mu}(B) = \mu(B^{-1})$

$\Rightarrow \hat{\sigma} = |\hat{\mu}|^2$

$$\int_G \hat{\varphi}_\alpha(t)\,\hat{\sigma}(st)dt = \int_G \hat{\varphi}_\alpha(t) \int_\Gamma (st, \gamma^{-1})\,\sigma(d\gamma)dt$$

$$\overset{1)}{=} \int_\Gamma \int_G \hat{\varphi}_\alpha(t)\ (st, \gamma^{-1})\,dt\ \sigma(d\gamma)$$

$$= \int_\Gamma \int_G \hat{\varphi}_\alpha(t)\ (t, \gamma^{-1})\,dt\,(s, \gamma^{-1})\,\sigma(d\gamma)$$

$$\overset{2)}{=} \int_\Gamma \varphi_\alpha(\gamma^{-1})\ (s, \gamma^{-1})\ \sigma(d\gamma)$$

Die Gleichheit 1) gilt nach dem Satz von Fubini, da (t,γ) stetig auf $G \times \Gamma$ ist ([11], Seite 10), und 2) wegen der Inversionsformel.

$\Rightarrow \lim_\alpha \int_G \hat{\varphi}_\alpha(t)\,|\hat{\mu}(st)|^2 dt = \sigma(\{1\})$, da $\varphi_\alpha(\gamma^{-1})(s,\gamma^{-1})$ stetig ist, kompakten Träger in W_α hat, und da $\varphi_\alpha(1)(s,1) = 1$ ist. Und es gilt $\sigma(\{1\}) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \mu(\{\gamma\})^2$ ([11], Seite 118). □

Lemma 5:

Sei ψ eine reelle beschränkte meßbare nichtnegative Funktion auf G. Dann gilt $\lim_\alpha M_\alpha\psi = 0 \Leftrightarrow \lim_\alpha M_\alpha\,\psi^2 = 0$.

Beweis:

Das Lemma folgt aus der Ungleichung $(M_\alpha\psi)^2 \le M_\alpha\psi^2 \le$

$\le \sup_{t\in G} \psi(t)\ M_\alpha\psi$. □

Definition 6:

Sei $B \in \mathfrak{B}(G)$. Wenn $\lim_\alpha M_\alpha\,1_B$ existiert, heißt der Grenzwert $d(B) \in [0,1]$ die Dichte von B.

Lemma 7:

Sei ψ eine reelle beschränkte meßbare nichtnegative Funktion auf G. Es gilt $\lim_\alpha M_\alpha\psi = 0 \Leftrightarrow$

$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ B \in \mathfrak{B}(G)$ mit $d(B) = 0$, so daß $\psi|_{B^c} < \varepsilon$.

Beweis:

Ist $\psi = 0$, so ist alles klar. Sei $\psi \neq 0$.

"⇐": Sei $\varepsilon > 0$ und $B \in \mathcal{B}(G)$ mit $d(B) = 0$ und $\psi|_{B^c} < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \forall\, \alpha \in I$ gilt $M_\alpha \psi = M_\alpha\, 1_{B^c}\psi + M_\alpha\, 1_B\psi$

$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sup_{t\in G} \psi(t)\, M_\alpha\, 1_B$.

$\exists$ Umgebung W der 1 in Γ so daß $\forall\, \alpha \in I$ mit

$W_\alpha \subset W$ $M_\alpha\, 1_B < \frac{\varepsilon}{2 \sup_{t\in G} \psi(t)}$ gilt

$\Rightarrow \forall \alpha \in I$ mit $W_\alpha \subset W$ gilt $M_\alpha \psi < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_\alpha M_\alpha \psi = 0$

"⇒": Sei $\varepsilon > 0$. $B := \{t \in G : \psi(t) \geq \varepsilon\}$

Es gilt $1_B \leq \varepsilon^{-1} \psi$

$\Rightarrow M_\alpha\, 1_B \leq \varepsilon^{-1} M_\alpha \psi \Rightarrow \lim_\alpha M_\alpha\, 1_B = 0.$ □

Satz 3 und Lemma 4, 5 und 7 zeigen die Analogie des Mittels $\lim_\alpha M_\alpha$ zum starken Cesàromittel im Fall $G = \mathbb{Z}$.

Zunächst wird wieder G ohne Topologie betrachtet. $\{U_t : t \in G\}$ sei eine notwendig abelsche Gruppe von Isometrien in H. Für $H' \subset H$ sei Span H' der von H' aufgespannte komplexe lineare Raum und $\overline{\text{Span}}\ H'$ der von H' aufgespannte Unterraum von H, d.h. der Abschluß von Span H'.

$H_d := \overline{\text{Span}}\ \{h \in H : \forall\, t \in G \ \exists\, c_t \in \mathbb{C}, \text{ so daß } U_t h = c_t h\}$

$H_c := H_d^\perp$

H_c und H_d sind invariant unter $\{U_t : t \in G\}$. Die Abbildung $t \mapsto (U_t f, f)$ ist nichtnegativ-definit für jedes $f \in H$.

Ist G lokalkompakte abelsche Gruppe und die Abbildung $t \mapsto U_t$ stetig in der schwachen Operatortopologie, oder, was für Isometrien dasselbe ist, in der starken Operatortopologie, dann ist $t \mapsto (U_t f, f)$ stetig für jedes $f \in H$ und nach dem Satz von Bochner ([11], Seite 19) gibt es zu jedem $f \in H$ ein $\mu_f \in M(\Gamma)$,

so daß $(U_t f,f) = \int_\Gamma (t,\gamma^{-1})\ \mu_f(d\gamma) = \hat{\mu}_f(t) \quad (t \in G)$.
Das Maß μ_f ist eindeutig.

Satz 8:

Sei H Hilbertraum, G lokalkompakte abelsche Gruppe, $\{U_t : t \in G\}$ eine Gruppe von Isometrien in H, und die Abbildung $t \mapsto U_t$ sei stetig in der schwachen Operatortopologie.

Dann sind für jedes $f \in H$ folgende Aussagen äquivalent:

1) $f \in H_c$.

2) μ_f ist stetig .

3) $\lim_\alpha M_\alpha |(U_t f,f)| = 0$.

4) $\lim_\alpha M_\alpha |(U_t f,g)| = 0 \quad \forall\ g \in H$.

Ist $H' \subset H$ mit $\overline{\text{Span}}\ H' = H$, so ist äquivalent

5) $\lim_\alpha M_\alpha |(U_t f,g)| = 0 \quad \forall\ g \in H'$.

Ist H separabel oder G abzählbar, so auch 6), 7) und 8):

6) $\exists\ (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G$ so daß $U_{t_n} f \underset{n\to\infty}{\to} 0$ schwach.

7) $\exists (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G \quad \forall\ \varepsilon > 0 \quad \forall\ g \in H \quad \exists\ p \in \mathbb{N} \quad \exists\ \alpha_1,\ldots,\alpha_p \geq 0$ mit $\sum_{n=1}^{p} \alpha_n = 1$ so daß $\forall\ U \in \overline{\{U_t : t \in G\}}$ gilt
$\sum_{n=1}^{p} \alpha_n \,|\, (U\, U_{t_n} f,g)| < \varepsilon$.

8) $\exists (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G \quad \forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ p \in \mathbb{N} \quad \exists\ \alpha_1,\ldots,\alpha_p \geq 0$ mit $\sum_{n=1}^{p} \alpha_n = 1$, so daß $\forall\ t \in G$ gilt $\sum_{n=1}^{p} \alpha_n \,|\, (U_{tt_n} f,f)| < \varepsilon$.

($\overline{U} := \overline{\{U_t : t \in G\}}$ ist der Abschluß von $\{U_t : t \in G\}$ in den beschränkten Operatoren bezüglich der schwachen Operatortopologie ([5], 1, Seite 97ff.)).

Die Aussagen 1), 6), 7) und 8) sind unabhängig von einer Topologie auf G, andererseits kann G immer mit der diskreten Topologie versehen werden. G ist dann lokalkompakt und $t \mapsto U_t$ stetig in der schwachen Operatortopologie. Deswegen gilt das

Korollar:

Sei G abelsche Gruppe und $\{U_t : t \in G\}$ eine Gruppe von Isometrien in H. H sei separabel oder G abzählbar. Dann sind für jedes $f \in H$ 1), 6), 7) und 8) äquivalent.

Bemerkung: Läßt sich G so mit einer Topologie versehen, daß G kompakte topologische Gruppe ist, also Γ diskret ist, so ist jedes nichttriviale reguläre Borelmaß auf Γ nicht stetig.

Ist dann $t \mapsto U_t$ stetig in der schwachen Operatortopologie, so ist $H_c = \{0\}$.

Zunächst wird noch ein Lemma bewiesen.

Lemma 9:

Seien $H', H'' \subset H$. Gilt $\forall f \in H'$ und $\forall g \in H''$ $\lim_\alpha M_\alpha |(U_t f,g)| = 0$, so gilt auch $\forall f \in \overline{\text{Span}}\, H'$ und $\forall g \in \overline{\text{Span}}\, H''$ $\lim_\alpha M_\alpha |(U_t f,g)| = 0$. Ist außerdem $H' \subset H''$, so gilt $\forall f \in \overline{\text{Span}}\, H'$ und $\forall g \in H$ $\lim_\alpha M_\alpha |(U_t f,g)| = 0$.

Beweis:

Sei $f \in H'$.

i) Sei $g \in \text{Span}\, H''$, $g = \sum_{i=1}^{n} c_i g_i$ $(g_i \in H'')$

$\Rightarrow M_\alpha |(U_t f,g)| \leq \sum_{i=1}^{n} |c_i| \cdot M_\alpha |(U_t f,g_i)|$

$\Rightarrow \lim_\alpha M_\alpha |(U_t f,g)| = 0$.

ii) Sei $g \in \overline{\text{Span}}\, H''$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \text{Span}\, H''$ mit $\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\| = 0$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$M_\alpha|(U_t f,g)| \le M_\alpha|(U_t f,g_n)| + M_\alpha|(U_t f,g-g_n)|$$
$$\le M_\alpha|(U_t f,g_n)| + \|f\|\,\|g-g_n\|$$

i)
$\Rightarrow \lim_\alpha M_\alpha|(U_t f,g)| = 0$ (analog Beweis von Lemma 7).

iii) Sei außerdem $f \in H''$.

Sei $g \in \{U_t f : t \in G\}$, $g = U_s f$.

Dann gilt

$$(U_t f,g) = (U_t f,U_s f) = (U_{ts^{-1}} f,f)$$

und deshalb

$$M_\alpha|(U_t f,g)| = M_\alpha|(U_{ts^{-1}} f,f)|$$

$\Rightarrow \lim_\alpha M_\alpha|(U_t f,g)| = 0$ (Satz 3, Lemma 4 und 5).

ii)
$\Rightarrow \forall\, g \in \overline{\text{Span}}\,\{U_t f : t \in G\}$ gilt

$$\lim_\alpha M_\alpha|(U_t f,g)| = 0.$$

$\forall\, g \in (\overline{\text{Span}}\,\{U_t f : t \in G\})^\perp$ gilt $(U_t f,g) = 0$,

also $\lim_\alpha M_\alpha|(U_t f,g)| = 0$

i)
$\Rightarrow \forall\, g \in H$ gilt $\lim_\alpha M_\alpha|(U_t f,g)| = 0$.

iv) Für $f \in \overline{\text{Span}}\, H'$ geht der Beweis genau so wie i) und ii). □

Beweis von Satz 8:

Folgende Implikationen werden bewiesen:

5) $\Leftrightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 6) $\Rightarrow$ 7) $\Rightarrow$ 8) $\Rightarrow$ 2).

4) $\Rightarrow$ 5) und 7) $\Rightarrow$ 8) sind offensichtlich,

5) $\Rightarrow$ 4) und 3) $\Rightarrow$ 4) nach Lemma 9,

2) $\Rightarrow$ 3) nach Satz 3 und Lemma 5.

4) $\Rightarrow$ 1):

Sei $g \in H_d$ derart, daß $\forall\, t \in G \quad \exists\, c_t \in \mathbb{C}$ (notwendig $|c_t| = 1$) so daß $U_t g = c_t g$.

$\forall\, t \in G$ gilt

$$|(f,g)| = |(U_t f, U_t g)| = |(U_t f, c_t g)| = |(U_t f, g)|.$$

$$\Rightarrow |(f,g)| = \lim_{\alpha} M_\alpha |(U_t f, g)| = 0$$

$$\Rightarrow f \in H_c .$$

1) $\Rightarrow$ 2):

Für $f = 0$ ist $\mu_f = 0$.

Sei $f \neq 0$.

Annahme: $\exists\, \gamma_o \in \Gamma$ mit $\mu_f(\{\gamma_o\}) > 0$.

$\forall\, t \in G$ sei $V_t := (t, \gamma_o) U_t$

$\{V_t : t \in G\}$ ist eine abelsche Gruppe von Isometrien. F und $K(f)$ seien wie am Anfang des Paragraphen definiert.

$$f \in H_c \overset{\text{i)}}{\Rightarrow} f \perp F \overset{\text{ii)}}{\Leftrightarrow} 0 \in K(f)$$

i) gilt, da $F \subset H_d$,

ii) folgt aus dem Normergodensatz.

Es gilt also $0 \in K(f) \cap F$.

$\Rightarrow \exists\, t_1, \ldots, t_n \in G \quad \exists\, l_c \in \mathbb{N}$ so daß mit

$$M_l = l^{-n} \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{l-1} V_{t_1^{i_1} \ldots t_n^{i_n}} \qquad \forall\, l \geq l_c \text{ gilt}$$

$$\|M_l f\| < \frac{\mu_f(\{\gamma_o\})}{2\,\|f\|} \qquad \text{(nach Satz 1)}.$$

Es ist $\forall\, l \in \mathbb{N}$

$$(M_l f, f)$$

$$= l^{-n} \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{l-1} (t_1^{i_1} \ldots t_n^{i_n}, \gamma_o)\, (U_{t_1^{i_1} \ldots t_n^{i_n}} f, f)$$

$$= l^{-n} \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{l-1} (t_1^{i_1} \ldots t_n^{i_n}, \gamma_o) \int_\Gamma (t_1^{i_1} \ldots t_n^{i_n}, \gamma^{-1})\, \mu_f(d\gamma)$$

$$= \int_\Gamma l^{-n} \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{l-1} (t_1^{i_1} \ldots t_n^{i_n}, \gamma_o\gamma^{-1})\ \mu_f(d\gamma)$$

$$= \int_\Gamma l^{-n} \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{l-1} \prod_{k=1}^{n} (t_k^{i_k}, \gamma_o\gamma^{-1})\ \mu_f(d\gamma)$$

$$= \int_\Gamma \prod_{k=1}^{n} l^{-1} \sum_{i=0}^{l-1} (t_k^i, \gamma_o\gamma^{-1})\ \mu_f(d\gamma)\ .$$

$\forall\ \gamma \in \Gamma$ gilt

$$\lim_{l\to\infty} \prod_{k=1}^{n} l^{-1} \sum_{i=0}^{l-1} (t_k^i, \gamma_o\gamma^{-1}) = \begin{cases} 1 \text{ falls } \forall\ k \in \{1,\ldots,n\}\ (t_k, \gamma_o\gamma^{-1}) = 1 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{l\to\infty} (M_l f, f) = \mu_f(\{\gamma \in \Gamma : (t_k, \gamma_o\gamma^{-1}) = 1 \quad \forall\ k \in \{1,\ldots,n\}\})$$

(majorisierte Konvergenz)

$$\geq \mu_f(\{\gamma_o\}).$$

Andererseits ist $\forall\ l \geq l_o$

$$|(M_l f, f)| \leq \|M_l f\|\,\|f\| < \tfrac{1}{2}\,\mu_f(\{\gamma_o\})$$

$$\Rightarrow \lim_{l\to\infty} |(M_l f, f)| \leq \tfrac{1}{2}\,\mu_f(\{\gamma_o\})\ .$$

Das ist ein Widerspruch zu $\mu_f(\{\gamma_o\}) > 0$.

4) $\Rightarrow$ 6):

Wenn H separabel oder G abzählbar ist, gibt es eine Folge $(g_l)_{l\in\mathbb{N}} \in H$, so daß $\{U_t f : t \in G\} \subset \overline{\text{Span}}\ \{g_l : l \in \mathbb{N}\}$.

$\forall\ l \in \mathbb{N}\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \ \exists\ B_n^l \in \mathcal{B}(G)$ mit $d(B_n^l) = 1$

so daß $\forall\ t \in B_n^l$ gilt $|(U_t f, g_l)| < \frac{1}{n}$ (Lemma 7).

Definiere $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \ B_n := \bigcap_{j=1}^{n} B_n^j$. Es gilt $d(B_n) = 1$.

Sei $t_n \in B_n$.

$\forall\ l \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{n\to\infty} (U_{t_n} f, g_l) = 0$; denn:

Sei $l \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ und

sei $N \in \mathbb{N}$ so groß, daß $\frac{1}{N} \leq \varepsilon$ und $N \geq l$.

Dann gilt $\forall n \geq N \quad |(U_{t_n} f, g_1)| < \varepsilon$.

Also folgt $U_{t_n} f \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ schwach.

6) $\Rightarrow$ 7): siehe Jones [6]

Sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G$ so daß $U_{t_n} f \underset{n\to\infty}{\to} 0$ schwach.

$\bar{U}$ ist schwach kompakt bezüglich der schwachen Operatortopologie und $\forall\, U \in \bar{U}$ gilt $\|U\| \leq 1$. ([5], 1, Seite 98)

Sei $\varepsilon > 0$, $g \in H$ und sei $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$F_n : \bar{U} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$U \mapsto |(UU_{t_n} f, g)| .$$

Die Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen 0 und ist beschränkt durch $\|f\|\|g\|$. Außerdem gilt $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C(\bar{U})$ (reelle stetige Funktionen). Nach dem Rieszschen Darstellungssatz und dem Satz von der majorisierten Konvergenz gilt $F_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ in der schwachen Topologie von $C(\bar{U})$. Nach einem Satz von Mazur liegt 0 als schwacher Häufungspunkt im Normabschluß der konvexen Hülle von $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$. Also $\exists\, p \in \mathbb{N}$ und $\exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_p \geq 0$ mit $\sum_{n=1}^{p} \alpha_n = 1$ so daß gilt

$$\sum_{n=1}^{p} \alpha_n |(UU_{t_n} f, g)| < \varepsilon \quad \forall\, U \in \bar{U}.$$

8) $\Rightarrow$ 2):

Ist $f = 0$, so ist wieder alles klar. Sei $f \neq 0$.

Sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G$, so daß $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, p \in \mathbb{N}\ \exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_p \geq 0$ mit $\sum_{n=1}^{p} \alpha_n = 1$, und $\forall\, t \in G$ gilt

$$\sum_{n=1}^{p} \alpha_n |(U_{tt_n} f, f)| < \frac{\varepsilon}{|f|^2} .$$

$$\Rightarrow \forall\, t \in G \text{ gilt } \sum_{n=1}^{p} \alpha_n |(U_{tt_n} f, f)|^2 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall\, \alpha \in I \text{ ist } M_\alpha \sum_{n=1}^{p} \alpha_n |(U_{tt_n} f, f)|^2 < \varepsilon .$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{\alpha} M_\alpha \,|\, (U_{tt_n} f, f)\,|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} \mu_f(\{\gamma\})^2$ (Lemma 4)

$\Rightarrow \sum_{\gamma\in\Gamma} \mu_f(\{\gamma\})^2 = \lim_{\alpha} M_\alpha \sum_{n=1}^{p} \alpha_n \,|\, (U_{tt_n} f, f)\,|^2 \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \mu_f$ ist stetig.

Damit ist Satz 8 bewiesen.

Sei (Ω, F, P) Wahrscheinlichkeitsraum, G abelsche Gruppe und $\{T_t : t \in G\}$ eine Gruppe von maßtreuen Transformationen in (Ω, F, P).

$\forall\, t \in G$ sei U_t die auf $L_2(P)$ durch $U_t f = f \circ T_t$ $(f \in L_2(P))$ definierte Isometrie. $\{U_t : t \in G\}$ ist eine abelsche Gruppe von Isometrien in $L_2(P)$.

Definition 10:

$\{T_t : t \in G\}$ heißt schwach mischend, wenn $L_2(P)_c = \{1\}^{\perp}$.

Bemerkung: Die bei Rohlin [9] angegebene Definition für schwache Mischung im Falle $G = \mathbb{R}$ und die übliche Definition im Falle $G = \mathbb{Z}$ sind äquivalent zu der hier gegebenen. Läßt sich G so mit einer Topologie versehen, daß G kompakte topologische Gruppe ist, und daß $t \mapsto U_t$ stetig in der schwachen Operatortopologie ist, so ist $L_2(P)_c = \{0\}$. Außer in trivialen Fällen kann dann $\{T_t : t \in G\}$ nicht schwach mischend sein. Schwache Mischung impliziert Ergodizität.

Satz 11:

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1) $\{T_t : t \in G\}$ ist schwach mischend.

und, falls $L_2(P)$ separabel oder G abzählbar ist, 2), 3) und 4)

2) $\forall\, f \in \{1\}^{\perp}$ $\exists (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G$ so daß $U_{t_n} f \underset{n\to\infty}{\to} 0$ schwach.

3) $\forall f \in \{1\}^{\perp}$ $\exists (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G$ $\forall\, \varepsilon > 0$ $\forall\, g \in L_2(P)$

$\exists\, p \in \mathbb{N} \quad \exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_p \geq 0$ mit $\sum_{n=1}^{p} \alpha_n = 1$ so daß
$\forall\, U \in \overline{U}$ gilt $\sum_{n=1}^{p} \alpha_n |(UU_{t_n} f, g)| < \varepsilon$.

4) $\forall\, f \in \{1\}^{\perp} \quad \exists\, (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, p \in \mathbb{N}$
$\exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ mit $\sum_{n=1}^{p} \alpha_n = 1$, so daß
$\forall\, t \in G$ gilt $\sum_{n=1}^{p} \alpha_n \, | \, (U_{tt_n} f, f) \, | < \varepsilon$.

Ist G lokalkompakte abelsche Gruppe und $t \mapsto U_t$ stetig in der schwachen Operatortopologie, dann sind zu 1) auch 5), 6), 7), 8), 9), 10) und 11) äquivalent:

5) $\forall\, B, C \in F$ gilt

$$\lim_{\alpha} M_\alpha |P(B \cap T_t^{-1} C) - P(B)\, P(C)| = 0 .$$

6) $\forall\, B \in F$ gilt

$$\lim_{\alpha} M_\alpha |P(B \cap T_t^{-1} B) - P(B)^2| = 0 .$$

7) $\{T_t : t \in G\}$ hat stetiges Spektrum in $\{1\}^{\perp}$, d.h.
$\forall\, f \in \{1\}^{\perp}$ ist μ_f stetig.

8) $\forall\, f \in \{1\}^{\perp}$ gilt

$$\lim_{\alpha} M_\alpha |(U_t f, f)| = 0 .$$

9) $\forall\, f \in \{1\}^{\perp} \quad \forall\, g \in L_2(P)$ gilt

$$\lim_{\alpha} M_\alpha |(U_t f, g)| = 0 .$$

10) $\forall\, f \in L_2(P)$ gilt

$$\lim_{\alpha} M_\alpha |(U_t f, f) - |(f,1)|^2| = 0 .$$

11) $\forall\, f, g \in L_2(P)$ gilt

$$\lim_{\alpha} M_\alpha |(U_t f, g) - (f,1)(1,g)| = 0 .$$

In den Punkten 8), 9), 10) und 11) kann statt $L_2(P)$ oder $\{1\}^{\perp}$ jeweils eine aufspannende Menge stehen (Lemma 9).

Beweis:

1), 2), 3) und 4) sind äquivalent nach dem Korollar von Satz 8.

1, 7), 8) und 9) sind äquivalent nach Satz 8.

11) $\Rightarrow$ 9), 10) $\Rightarrow$ 8), 11) $\Rightarrow$ 5) und 5) $\Rightarrow$ 6) sind offensichtlich.

9) $\Rightarrow$ 11) und 8) $\Rightarrow$ 10) erhält man, indem man 8) und 9) $\forall\, f, g \in L_2(P)$ auf $f' = f - (f,1)$ und $g' = g - (g,1)$ anwendet.

6) $\Rightarrow$ 11) nach Lemma 9. $\square$

Satz 12:

$\{T_t : t \in G\}$ ist schwach mischend genau dann, wenn $\{T_t \times T_t : t \in G\}$ ergodisch ist.

Der Beweis ist derselbe wie im Fall $G = \mathbb{Z}$ (siehe zum Beispiel: Halmos [4], Seite 39) mit dem Mittel $\lim_{\alpha} M_\alpha$ statt des starken Cesàromittels, dabei wird G mit der diskreten Topologie versehen.

Sei G wieder lokalkompakte abelsche Gruppe und $t \mapsto U_t$ stetig in der schwachen Operatortopologie. $C_o(G)$ seien die komplexen stetigen Funktionen auf G, die im Unendlichen verschwinden, d.h. $C_o(G) = \{f : G \to \mathbb{C} : f$ ist stetig und $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, K \subset G$, K kompakt so daß $|f|_{K^c}| < \varepsilon\}$. $C_o(G)$ ist ein komplexer linearer Raum.

Definition 13:

$\{T_t : t \in G\}$ heißt (stark) mischend, wenn $\forall\, B,C \in F$ gilt $P(B \cap T_t^{-1} C) - P(B)\, P(C) \in C_o(G)$.

Bemerkung: Der Begriff starke Mischung hängt also von der Topologie auf G ab. Falls G kompakt ist, ist $\{T_t : t \in G\}$ nach Definition stark mischend. Für kompakte Gruppen G ist die Definition also nicht sinnvoll (siehe auch die Bemerkung nach

Definition 10).

Lemma 14:

Seien $H', H'' \subset L_2(P)$. Gilt $\forall f \in H'$ und $\forall g \in H''$ $(U_t f,g) \in C_o(G)$, so gilt $\forall f \in \overline{\text{Span}}\, H'$ und $\forall g \in \overline{\text{Span}}\, H''$ $(U_t f,g) \in C_o(G)$.

Ist $H' \subset H''$, so gilt $\forall f \in \overline{\text{Span}}\, H'$ und $\forall g \in L_2(P)$ $(U_t f,g) \in C_o(G)$.

Der Beweis geht analog zum Beweis von Lemma 9.

Satz 15:

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1) $(T_t : t \in G)$ ist mischend.

2) $\forall B \in F$ gilt $P(B \cap T_t^{-1}B) - P(B)^2 \in C_o(G)$.

3) $\forall f \in \{1\}^{\perp}$ gilt $\hat{\mu}_f \in C_o(G)$.

4) $\forall f \in \{1\}^{\perp}$ $\forall g \in L_2(P)$ gilt $(U_t f,g) \in C_o(G)$.

5) $\forall f \in L_2(P)$ gilt $(U_t f,f) - |(f,1)|^2 \in C_o(G)$.

6) $\forall f,g \in L_2(P)$ gilt $(U_t f,g) - (f,1)(1,g) \in C_o(G)$.

In den Punkten 3), 4), 5) und 6) kann statt $L_2(P)$ oder $\{1\}^{\perp}$ jeweils eine aufspannende Menge stehen. (Lemma 14)

Beweis:

6) $\Rightarrow$ 5), 5) $\Rightarrow$ 3), 6) $\Rightarrow$ 1) und 1) $\Rightarrow$ 2) sind offensichtlich.

3) $\Rightarrow$ 4) und 2) $\Rightarrow$ 6) nach Lemma 14.

4) $\Rightarrow$ 6) analog zum Beweis von Satz 11 9) $\Rightarrow$ 8). $\square$

Satz 16:

Ist G lokalkompakte nicht kompakte abelsche Gruppe und $\mu \in M(\Gamma)$, dann gilt: $\hat{\mu} \in C_o(G) \Rightarrow \mu$ ist stetig.

Zum Beweis siehe [11], Seite 118-119. Dort ist allerdings nicht beachtet worden, daß G nicht kompakt sein darf.

Korollar: Ist G lokalkompakte nicht kompakte abelsche Gruppe und $t \mapsto U_t$ stetig in der schwachen Operatortopologie, so gilt: Ist $\{T_t : t \in G\}$ mischend, dann ist $\{T_t : t \in G\}$ schwach mischend.

§ 2 Schwach und stark mischende Gaußsche Prozesse

Sei (Ω, F, P) wieder der zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum. Alle in diesem Paragraphen vorkommenden stochastischen Prozesse sollen, falls nichts anderes gesagt wird, komplexwertig sein. Prozesse zweiter Ordnung sind Prozesse, deren zweite Momente endlich sind, normierte Prozesse solche, deren Erwartungswert 0 ist. Sei G abelsche Gruppe. Zu Prozessen zweiter Ordnung $(Z_t)_{t\in G}$ sei

$$L((Z_t)_{t\in G}) = \overline{\text{Span}}\,\{Z_t : t \in G\} \subset L_2(P)$$

Definition 17:

Prozesse $(Z_t)_{t\in G}$ heißen schwach stationär, wenn

1) $(Z_t)_{t\in G} \in L_2(P)$

2) $\forall\, s,t \in G : E\, Z_s \overline{Z_t} = E\, Z_{st^{-1}} \overline{Z}_1$.

Stationäre Prozesse zweiter Ordnung sind schwach stationär. Ist $(Z_t)_{t\in G}$ schwach stationär, so ist die Funktion $t \mapsto E\, Z_t \overline{Z}_1$ nichtnegativ-definit. Ist G lokalkompakte abelsche Gruppe, und ist die Abbildung $t \mapsto Z_t$ stetig im quadratischen Mittel, so gibt es nach dem Satz von Bochner ein Maß $\mu \in M(\Gamma)$ mit

$$E\, Z_t \overline{Z}_1 = \int_\Gamma (t,\gamma^{-1})\ \mu(d\gamma) = \hat{\mu}(t) \qquad (t \in G).$$

μ ist eindeutig und heißt das Spektralmaß von $(Z_t)_{t\in G}$. Für reelle Prozesse ist das Spektralmaß μ symmetrisch, d.h. für

$\Phi : \Gamma \to \Gamma$

$\gamma \mapsto \gamma^{-1}$ gilt $\Phi\mu = \mu$.

Satz 18:

Sei G lokalkompakte abelsche Gruppe, $(Z_t)_{t\in G}$ schwach stationärer Prozeß, $t \mapsto Z_t$ stetig im quadratischen Mittel und μ das Spektralmaß von $(Z_t)_{t\in G}$.

Dann gibt es einen Unterraum L von $L_2(P)$ mit $L((Z_t)_{t\in G}) \subset L$, für den gilt:

1) Ist G diskret, dann ist $L = L((Z_t)_{t\in G})$.
2) Ist $(Z_t)_{t\in G}$ normiert, dann ist $L \subset \{1\}^\perp$.
3) Ist $(Z_t)_{t\in G}$ Gaußsch, dann ist $\forall f_1,\dots,f_n \in L$ die gemeinsame Verteilung Gaußsch.

Und es gibt einen Isomorphismus $V : L_2(\mu) \to L$, für den $V(t^{-1},\cdot) = Z_t (t \in G)$ gilt.

Beweis:

1) Sei $\tilde{L}$ das orthogonale Komplement von $\overline{\text{Span}}\ \{(t,\cdot) : t \in G\}$ in $L_2(\mu)$ und $(e_k)_{k\in I}$ eine ON-Basis von $\tilde{L}$. I kann leer sein; I ist leer, wenn G diskret ist ([11], Seite 24). Sei $(Y_k)_{k\in I}$ reeller Gaußscher Prozeß mit Verteilung $(N(0,1))^I$, so daß $(Y_k)_{k\in I}$ und $(Z_t)_{t\in G}$ unabhängig sind. $L((Z_t)_{t\in G})$ und $L((Y_k)_{k\in I})$ sind dann orthogonal.

$L := L((Z_t)_{t\in G}) \oplus L((Y_k)_{k\in I})$

Ist $(Z_t)_{t\in G}$ normiert, so ist $L \subset \{1\}^\perp$. Ist $(Z_t)_{t\in G}$ Gaußsch, so sind $\forall\, t_1,\dots,t_n \in G\ \forall\, k_1,\dots,k_1 \in I$ $Z_{t_1},\dots,Z_{t_n}, Y_{k_1},\dots,Y_{k_1}$ gemeinsam normalverteilt. Daher ist $\forall\, f_1,\dots,f_n \in L$ die gemein-

same Verteilung Gaußsch.

2) Es gilt $\sum_{j=1}^{n} a_j(t_j,\cdot) = 0$ μ - f.ü. $\Leftrightarrow$ $\sum_{j=1}^{n} a_j Z_{t_j} = 0$ P-f.ü.

$(a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{C};\ t_1,\ldots,t_n \in G)$; denn

$$\int_\Gamma \left|\sum_{j=1}^{n} a_j(t_j,\cdot)\right|^2 d\mu = \sum_{i,j=1}^{n} a_i \bar{a}_j \int_\Gamma (t_i,\cdot)\,\overline{(t_j,\cdot)}\, d\mu$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_i \bar{a}_j \int_\Gamma (t_i t_j^{-1},\cdot)\, d\mu = \sum_{i,j=1}^{n} a_i \bar{a}_j\, E\, Z_{t_i} \bar{Z}_{t_j}$$

$$= E\left|\sum_{j=1}^{n} a_j Z_{t_j}\right|^2.$$

3) Definiere zunächst

V' : Span $(\{(t,\cdot) : t \in G\} \cup \{e_k : k \in I\}) \to L$

als lineare Abbildung, für die gilt

$V' e_k = Y_k$ $(k \in I)$ und

$V' \sum_{j=1}^{n} a_j (t_j^{-1},\cdot) = \sum_{j=1}^{n} a_j Z_{t_j}$ $(a_1,..,a_n \in \mathbb{C};\ t_1,\ldots,t_n \in G)$;

wegen 2) ist diese Definition eindeutig. V' erhält das Skalarprodukt und V'Span$(\{(t,\cdot) : t \in G\} \cup \{e_k : k \in I\})$ ist dicht in L. Da L vollständig ist, läßt sich durch Stetigkeit V' zu V auf $L_2(\mu)$ fortsetzen. $V : L_2(\mu) \to L$ ist ein Isomorphismus. □

Definition 19:

Sei H Hilbertraum.

$M : \mathcal{B}(\Gamma) \to H$ heißt Maß mit orthogonalen Werten, falls gilt

1) $(M(B_1), M(B_2)) = 0$ $\forall\, B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\Gamma)$ mit $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

2) Für jede Folge paarweise disjunkter Mengen $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(\Gamma)$ ist $(M(B_k))_{k\in\mathbb{N}}$ summierbar, und $M(\dot{\bigcup}_{k=1}^{\infty} B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} M(B_k)$.

Bemerkung:

$q(B) := \|M(B)\|^2$ $(B \in \mathcal{B}(\Gamma))$ ist Borelmaß. Weitere Eigenschaften von M und die Definition von $\int f\, dM$ $(f \in L_2(q))$, die analog zum Fall $\Gamma = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ sind, findet man bei Urbanik [14], Seite 6ff.

Satz 20: (Spektraldarstellung)

Sei G lokalkompakte abelsche Gruppe, $(Z_t)_{t\in G}$ schwach stationärer Prozeß, $t \mapsto Z_t$ stetig im quadratischen Mittel, μ das Spektralmaß von $(Z_t)_{t\in G}$ und V und L aus Satz 18. Dann ist durch

$M(B) = V\, 1_B$ $(B \in \mathcal{B}(\Gamma))$ ein Maß mit orthogonalen Werten definiert, für das gilt:

1) $\forall\, B \in \mathcal{B}(\Gamma) : \mu(B) = \|M(B)\|^2$.

2) $\forall\, \varphi \in L_2(\mu) : \int \varphi\, dM = V\varphi$ P-f.ü.

3) $\forall\, t \in G : Z_t = \int (t^{-1}, \cdot)\, dM$ P-f.ü.

4) Ist G diskrete abelsche Gruppe und $\{\tilde{U}_t : t \in G\}$ die abelsche Gruppe von unitären Operatoren auf L mit $\tilde{U}_s Z_t = Z_{ts}$ $(s,t \in G)$, so gilt $\forall\, \varphi \in L_2(\mu) : \tilde{U}_t \int \varphi\, dM = \int (t^{-1}, \cdot)\, \varphi\, dM$ P-f.ü.

5) Ist $(Z_t)_{t\in G}$ normiert, so gilt
$\forall \varphi \in L_2(\mu) : E \int \varphi\, dM = 0$.

6) Ist $(Z_t)_{t\in G}$ Gaußsch, so sind $\forall\, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L_2(\mu)$
$\int \varphi_1\, dM, \ldots, \int \varphi_n\, dM$ gemeinsam normalverteilt.

Ist G diskrete abelsche Gruppe und $(Z_t)_{t\in G}$ reell, so gelten noch 7), 8) und 9):

7) $\forall\, \varphi \in L_2(\mu) : \int \varphi\, dM = \overline{\int \bar{\varphi} \circ \Phi\, dM}$ P-f.ü.
insbesondere $\forall\, B \in \mathcal{B}(\Gamma) : M(B) = \overline{M(B^{-1})}$

8) $\forall\ B,C \in \mathcal{B}(\Gamma)$ gilt

i) $\operatorname{Re} M(B) = \operatorname{Re} M(B^{-1})$

$\operatorname{Im} M(B) = -\operatorname{Im} M(B^{-1})$

ii) $E(\operatorname{Re} M(B)\ \operatorname{Im} M(C)) = 0$

iii) $E(\operatorname{Re} M(B)\ \operatorname{Re} M(C)) = \frac{1}{2}(\mu(B \cap C) + \mu(B \cap C^{-1}))$

iv) $E(\operatorname{Im} M(B)\ \operatorname{Im} M(C)) = \frac{1}{2}\ (\mu(B \cap C) - \mu(B \cap C^{-1}))$

9) Ist $(Z_t)_{t\in G}$ normiert und Gaußsch, so sind

i) $(\operatorname{Re} M(B))_{B\in\mathcal{B}(\Gamma)}$ und $(\operatorname{Im} M(B))_{B\in\mathcal{B}(\Gamma)}$ normiert, Gaußsch und unabhängig

und

ii) $\forall\ B_1,\ldots,B_n \in \mathcal{B}(\Gamma)$, für die $B_1,\ldots,B_n,B_1^{-1},\ldots,B_n^{-1}$ paarweise disjunkt sind, $M(B_1),\ldots,M(B_n)$ unabhängig.

Der Beweis von Satz 20 läuft ganz analog zum bekannten Fall $G = \mathbb{Z}$.

Um das mehrfache Wienerintegral (siehe Totoki [13], Seite 48-57) auf reelle normierte stationäre Gaußsche Prozesse $(Z_t)_{t\in G}$ mit diskreter abelscher Gruppe G übertragen zu können, werden noch zwei Lemmata bewiesen.

Sei wieder G lokalkompakte abelsche Gruppe und Γ die duale Gruppe. Γ ist regulär, und $\{\gamma \in \Gamma : \gamma^2 = 1\}$ ist abgeschlossen.

Lemma 21:

Sei $\mu \in M(\Gamma)$ und $B \in \mathcal{B}(\Gamma)$ mit $B = B^{-1}$, $\{\gamma \in \Gamma : \gamma^2 = 1\} \subset B$ und $\mu(\Gamma \setminus B) > 0$. Dann gibt es ein kompaktes $K \subset \Gamma \setminus B$ mit $K \cap K^{-1} = \emptyset$ und $\mu(K \cup K^{-1}) > 0$.

Bemerkung: Lemma 21 und auch das folgende Lemma 22 gelten für alle hausdorffschen topologischen Gruppen Γ.

Beweis des Lemmas:

a) Γ ist regulär.

$\Rightarrow \forall\, \gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma \in \Gamma : \gamma^2 = 1\}$ $\exists$ abgeschlossene Umgebungen von γ und γ^{-1} $A'(\gamma)$, $A'(\gamma^{-1})$ mit $A'(\gamma) \cap A'(\gamma^{-1}) = \emptyset$.

Definiere $\forall\, \gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma \in \Gamma : \gamma^2 = 1\}$

$A(\gamma) = A'(\gamma) \cap (A'(\gamma^{-1}))^{-1}$. $A(\gamma)$ und $A(\gamma)^{-1}$ sind abgeschlossene Umgebungen von γ bzw. γ^{-1}, und es gilt $A(\gamma) \cap A(\gamma)^{-1} = \emptyset$.

b) Sei $K_1 \subset \Gamma \setminus B$ eine kompakte Menge mit $\mu(K_1) > 0$.

$\Rightarrow K_1^{-1} \subset \Gamma \setminus B$ und K_1^{-1} ist kompakt.

$K_2 := K_1 \cup K_1^{-1} \subset \Gamma \setminus B$ und K_2 ist kompakt, $K_2 = K_2^{-1}$ und $\mu(K_2) > 0$.

$\{\overset{\circ}{A}(\gamma) \cup (\overset{\circ}{A}(\gamma))^{-1} : \gamma \in K_2\}$ ist offene Überdeckung von K_2.

$\Rightarrow \exists\, \gamma_1, \ldots, \gamma_n \in K_2$ so daß $K_2 = \bigcup_{r=1}^{n} (A(\gamma_r) \cup A(\gamma_r)^{-1}) \cap K_2$.

$\Rightarrow \exists\, \gamma_o \in K_2$ so daß $\mu((A(\gamma_o) \cup A(\gamma_o)^{-1}) \cap K_2) > 0$.

Definiere $K := A(\gamma_o) \cap K_2$.

K ist kompakt, $K \subset \Gamma \setminus B$, $K \cap K^{-1} = \emptyset$ und $\mu(K \cup K^{-1}) > 0$.

Lemma 22:

Sei $\mu \in M(\Gamma)$. Dann gibt es ein $\tilde{\Gamma} \in \mathcal{B}(\Gamma)$ mit $\tilde{\Gamma} \cap \tilde{\Gamma}^{-1} = \emptyset$ und $\mu(\tilde{\Gamma} \cup \tilde{\Gamma}^{-1}) = \mu(\Gamma \setminus \{\gamma \in \Gamma : \gamma^2 = 1\})$.

Beweis durch Ausschöpfungsargument und Lemma 21:

Falls $\mu(\Gamma \setminus \{\gamma \in \Gamma : \gamma^2 = 1\}) = 0$, **ist man fertig.**

Sei $\mu(\Gamma \setminus \{\gamma \in \Gamma : \gamma^2 = 1\}) > 0$.

$\alpha_o := \sup \{\mu(C \cup C^{-1}) : C \in \mathcal{B}(\Gamma),\ C \subset \Gamma \setminus \{\gamma \in \Gamma : \gamma^2 = 1\},\ C \cap C^{-1} = \emptyset\}$

$\alpha_o > 0$ nach Lemma 21.

Sei $B_o \in \mathcal{B}(\Gamma)$ mit $B_o \subset \Gamma \setminus \{\gamma \in \Gamma : \gamma^2 = 1\}$ und $B_o \cap B_o^{-1} = \emptyset$, so daß $\mu(B_o \cup B_o^{-1}) \geq \frac{\alpha_o}{2}$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ sei $C_n = \{C \in \mathcal{B}(\Gamma)\colon C \subset \Gamma \setminus (\{\gamma \in \Gamma : \gamma^2 = 1\} \cup \bigcup_{\nu=0}^{n-1} (B_\nu \cup B_\nu^{-1}))$, $C \cap C^{-1} = \emptyset\}$.

$\alpha_n := \sup\{\mu(C \cup C^{-1}) : C \in C_n\}$

Sei $B_n \in C_n$ mit $\mu(B_n \cup B_n^{-1}) \geq \frac{\alpha_n}{2}$.

$\tilde{\Gamma} := \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}(\Gamma)$. Es ist $\tilde{\Gamma} \cap \tilde{\Gamma}^{-1} = \emptyset$ und

$\mu(\tilde{\Gamma} \cup \tilde{\Gamma}^{-1}) = \mu(\Gamma \setminus \{\gamma \in \Gamma : \gamma^2 = 1\})$. □

Das mehrfache Wienerintegral läßt sich auf folgende Situation (i) verallgemeinern:

(i): G ist diskrete, d.h. mit der diskreten Topologie versehene, abelsche Gruppe, R die Verteilung eines reellen normierten stationären Gaußschen Prozesses mit Parametermenge G und stetigem Spektralmaß μ mit $\mu(\{\gamma \in \Gamma : \gamma^2 = 1\}) = 0$.

(ii): Sei $K_t : \mathbb{R}^G \to \mathbb{R}$ definiert durch $K_t(x) = x_t$ und $T_t : \mathbb{R}^G \to \mathbb{R}^G$ durch $(T_t(x))_s = x_{ts}$ $(s,t \in G;\ x = (x_s)_{s\in G} \in \mathbb{R}^G)$. $\{T_t : t \in G\}$ ist eine abelsche Gruppe von maßtreuen invertierbaren Transformationen auf $(\mathbb{R}^G, \mathcal{B}^G, R)$. Sei $\{U_t : t \in G\}$ die dazu in § 1 definierte abelsche Gruppe von unitären Operatoren in $L_2(R)$.

(iii): Man braucht zur Verallgemeinerung des mehrfachen Wienerintegrals auf die Situation (i) das zum Prozeß $(K_t)_{t\in G}$ auf $(\mathbb{R}^G, \mathcal{B}^G, R)$ gehörige Maß mit orthogonalen Werten M aus Satz 20 mit den dort beschriebenen Eigenschaften, die Gruppe $\{U_t : t \in G\}$ und Lemma 22. Die Definition des mehrfachen Wienerintegrals und den Beweis von Satz 23 überträgt man fast wörtlich aus [13], Seite 48-57, wenn man die dort vorkommende Menge $[-\frac{1}{2}, 0)$ durch $\tilde{\Gamma}$ aus Lemma 22 ersetzt.

Für $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sei I_p das p-te mehrfache Wienerintegral.

$H_p := \{I_p(\varphi_p) : \varphi_p \in L_2(\Gamma^p, \mu^p)\}$ $(p \in \mathbb{N})$

$H_o := \{I_p(c) : c \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}$

Die H_p $(p \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ sind paarweise orthogonal.

Für $\varphi_p \in L_2(\Gamma^p, \mu^p)$ sei $\tilde{\varphi}_p = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} \varphi_p \circ \pi$.

Es gilt $I_p(\varphi_p) = I_p(\tilde{\varphi}_p)$ und

$U_t I_p(\tilde{\varphi}_p) = I_p(\prod_{\nu=1}^{p} (t^{-1}, \gamma_\nu)\, \tilde{\varphi}_p(\gamma_1, \ldots, \gamma_p))$ $(t \in G)$.

Satz 23:

Wenn die Situation (i) vorliegt, dann gilt

1) $L_2(R) = \bigoplus_{p=o}^{\infty} H_p$.

2) $U_t H_p = H_p$ $(t \in G,\ p \in \mathbb{N} \cup \{0\})$.

3) Sind $\varphi_p, \psi_p \in L_2(\Gamma^p, \mu^p)$ $(p \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ und gilt

$$\sum_{p=o}^{\infty} I_p(\varphi_p) = \sum_{p=o}^{\infty} I_p(\psi_p),$$

so ist $\tilde{\varphi}_p = \tilde{\psi}_p$ $(p \in \mathbb{N} \cup \{0\})$.

Als Anwendung von Satz 23 ergibt sich

Satz 24:

Sei G abelsche Gruppe, R die Verteilung eines reellen normierten stationären Gaußschen Prozesses mit Parametermenge G. μ sei das Spektralmaß des Prozesses, welches man erhält, wenn man G mit der diskreten Topologie versieht, und es gelte $\mu(\{\gamma \in \Gamma : \gamma^2 = 1\}) = 0$. $\{T_t : t \in G\}$ sei die oben definierte Gruppe von maßtreuen invertierbaren Transformationen von $(\mathbb{R}^G, \mathcal{B}^G, R)$. Dann sind äquivalent:

1) μ ist stetig.

2) $\{T_t : t \in G\}$ ist ergodisch.

3) $\{T_t : t \in G\}$ ist schwach mischend.

Beweis:

3) $\Rightarrow$ 2) ist klar.

2) $\Rightarrow$ 1): (wie $G = \mathbb{Z}$)

Seien $\{U_t : t \in G\}$ und M wie in (ii) und (iii) beschrieben.

$\exists\, \gamma_o \in \Gamma$ mit $\mu(\{\gamma_o\}) > 0$; dann gilt $\forall\, t \in G$

$U_t|M(\{\gamma_o\})| = |U_t M(\{\gamma_o\})| = \left| \int (t^{-1},\cdot)\, 1_{\{\gamma_o\}} dM \right|$ (Satz 20)

$= |(t^{-1},\gamma_o)\, M(\{\gamma_o\})| = |M(\{\gamma_o\}|.$

Es gilt $E|M(\{\gamma_o\})|^2 = \mu(\{\gamma_o\})$, $E\, M(\{\gamma_o\}) = 0$ und $M(\{\gamma_o\})$ ist normalverteilt.

$\Rightarrow$ $|M(\{\gamma_o\})|$ ist nicht konstant.

$\Rightarrow$ $\{T_t : t \in G\}$ ist nicht ergodisch.

1) $\Rightarrow$ 3):

a) Sei $p \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \Gamma$

$$\mu^p\Big(\{(\gamma_1,\ldots,\gamma_p) \in \Gamma^p : \prod_{\nu=1}^{p} \gamma_\nu = \gamma\}\Big)$$

$$= \int_{\Gamma^{p-1}} \mu\Big(\{\gamma_1 \in \Gamma : \gamma_1 = \gamma \prod_{\nu=2}^{p} \gamma_\nu^{-1}\}\Big)\, \mu^{p-1}(d\gamma_2,\ldots,d\gamma_p) = 0,$$

da $\{\gamma_1 \in \Gamma : \gamma_1 = \gamma \prod_{\nu=2}^{p} \gamma_\nu^{-1}\}$ nur im Element enthält.

b) Sei $f \in L_2(R)$ Eigenvektor von $\{U_t : t \in G\}$.

$\Rightarrow$ $\exists\, \gamma_o \in \Gamma$ so daß $U_t f = (t,\gamma_o) f$ $(t \in G)$.

Nach Satz 23 gilt:

$\forall\, p \in \mathbb{N}$ $\exists\, \varphi_p \in L_2(\Gamma^p,\mu^p)$ und $\exists\, \varphi_o \in \mathbb{C}$

so daß $f = \sum_{p=o}^{\infty} I_p(\varphi_p)$.

Es ist

$(t,\gamma_o)f = \sum_{p=o}^{\infty} I_p((t,\gamma_o)\tilde{\varphi}_p)$ $\quad (t \in G)$ und

$U_t f = \sum_{p=o}^{\infty} I_p \left(\prod_{\nu=1}^{p} (t^{-1},\gamma_\nu)\, \tilde{\varphi}_p(\gamma_1,\ldots,\gamma_p)\right) \quad (t \in G).$

Damit gilt weiter nach Satz 23:

$\forall\, p \in \mathbb{N} \quad \forall\, t \in G \quad \exists\, N(p,t) \in \mathcal{B}(\Gamma^p)$ mit $\mu^p(N(p,t)) = 0$

so daß $\forall\, (\gamma_1,\ldots,\gamma_p) \in N(p,t)^c$ gilt

$(t,\gamma_o)\, \tilde{\varphi}_p(\gamma_1,\ldots,\gamma_p) = \prod_{\nu=1}^{p} (t,\gamma_\nu^{-1})\ \tilde{\varphi}_p(\gamma_1,\ldots,\gamma_p)$, also

$\tilde{\varphi}_p(\gamma_1,\ldots,\gamma_p) = (t, \gamma_0 \prod_{\nu=1}^{p} \gamma_\nu)\, \tilde{\varphi}_p(\gamma_1,\ldots,\gamma_p).$

c) $\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, M(p,\varepsilon) \in \mathcal{B}(\Gamma^p)$ mit $\mu^p(M(p,\varepsilon)) > 1 - \varepsilon$

so daß $\tilde{\varphi}_p(\gamma_1,\ldots,\gamma_p) = 0 \qquad \forall (\gamma_1,\ldots,\gamma_p) \in M(p,\varepsilon)$.

Das sieht man so:

Nach a) gilt für $N(p) := \{(\gamma_1,\ldots,\gamma_p) \in \Gamma^p : \gamma_o \prod_{\nu=1}^{p} \gamma_\nu = 1\}$

$\mu^p(N(p)) = 0$.

$\forall\, (\gamma_1,\ldots,\gamma_p) \in N(p)^c \quad \exists\, t_{\gamma_1,\ldots,\gamma_p} \in G$ so daß

$(t_{\gamma_1,\ldots,\gamma_p}, \gamma_0 \prod_{\nu=1}^{p} \gamma_\nu) \neq 1$, da G die Punkte von Γ separiert

(siehe [11], Seite 24).

$\Rightarrow \forall\, (\gamma_1,\ldots,\gamma_p) \in N(p)^c \quad \exists$ offene Umgebung $U(\gamma_1,\ldots,\gamma_p)$

von $(\gamma_1,\ldots,\gamma_p)$ so daß $\forall\, (\bar{\gamma}_1,\ldots,\bar{\gamma}_p) \in U(\gamma_1,\ldots,\gamma_p)$

$(t_{\gamma_1,\ldots,\gamma_p}, \gamma_0 \prod_{\nu=1}^{p} \bar{\gamma}_\nu) \neq 1.$

Außerdem gilt:

$\exists$ kompaktes $K(p,\varepsilon) \subset N(p)^c$ mit $\mu^p(K(p,\varepsilon)) > 1 - \varepsilon$.

$\{U(\gamma_1,\ldots,\gamma_p) : (\gamma_1,\ldots,\gamma_p) \in K(p,\varepsilon)\}$ ist offene Überdeckung

von $K(p,\varepsilon)$.

$\Rightarrow \exists\, (\gamma_{\kappa 1},\ldots,\gamma_{\kappa p}) \in K(p,\varepsilon) \quad (\kappa = 1,\ldots,k)$ so daß

$K(p,\varepsilon) \subset \bigcup_{\kappa=1}^{k} U(\gamma_{\kappa 1},\ldots,\gamma_{\kappa p})$.

$M(p,\varepsilon) := K(p,\varepsilon) - \bigcup_{\kappa=1}^{k} N(p,t_{\gamma_{\kappa 1},\ldots,\gamma_{\kappa p}})$ hat die geforderten Eigenschaften.

$\Rightarrow \forall\, p \in \mathbb{N}$ ist $\tilde{\varphi}_p = 0$ μ^p - f.ü.

$\Rightarrow f = I_o(\varphi_o) \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow L_2(R)_c = \{1\}^{\perp} \Rightarrow \{T_t : t \in G\}$ ist schwach mischend. □

Satz 25:

Es gelten dieselben Voraussetzungen wie in Satz 24 und G sei nicht endlich.

Dann sind äquivalent:

1) $\hat{\mu} \in C_o(G)$.

2) $\{T_t : t \in G\}$ ist mischend.

Beweis:

2) $\Rightarrow$ 1) ist klar.

1) $\Rightarrow$ 2):

Es reicht zu zeigen: $(U_t f,f) \in C_o(G)$ $\forall\, f \in \{1\}^{\perp}$.

Sei $H' \subset \{1\}^{\perp}$ mit $\overline{\text{Span}}\, H' = \{1\}^{\perp}$.

Nach Lemma 14 reicht es zu zeigen:

$(U_t f,f) \in C_o(G)$ $\forall\, f \in H'$.

$\forall\, p \in \mathbb{N}$ sei $N_p := \{\varphi \in L_2(\Gamma^p,\mu^p)$:

$\varphi = {}^{1}B_1 \times \ldots \times B_p$ mit $B_1,\ldots,B_p \in \mathfrak{B}(\Gamma)$ und $B_\nu \subset \tilde{\Gamma}$ oder $B_\nu^{-1} \subset \tilde{\Gamma}$ $(\nu = 1,\ldots,p)$ und $B_1,\ldots,B_p, B_1^{-1},\ldots,B_p^{-1}$ sind paarweise disjunkt$\}$. Da G nicht endlich ist, also μ stetig ist (Satz 16), gilt $\overline{\text{Span}}\, N_p = L_2(\Gamma^p,\mu^p)$ ([13], Seite 51), und $H_p = \overline{\text{Span}}\, \{I_p(\varphi_p) : \varphi_p \in N_p\}$.

Nach Satz 23 gilt also für

$H' = \{I_p(\varphi_p) : p \in \mathbb{N}, \varphi_p \in N_p\}$ $\overline{\text{Span}}\, H' = \{1\}^{\perp}$.

Nun sei also $p \in \mathbb{N}$, $\varphi_p \in N_p$, $\varphi_p = 1_{B_1 \times \ldots \times B_p}$.

Es ist

$I_p(\varphi_p) = M(B_1) \ldots M(B_p)$ und

$U_t\, I_p(\varphi_p) = U_t\, M(B_1) \ldots U_t\, M(B_p)$ $\quad (t \in G)$.

Es gilt $\forall\, \nu \in \{1, \ldots, p\}$ $U_t\, M(B_\nu) = \int (t^{-1}, \cdot)\, 1_{B_\nu}\, dM$ (nach Satz 20).

$\Rightarrow$ $U_t\, M(B_\nu)$ ist meßbar bezüglich $A_\nu = \sigma(M(C) : C \in \mathcal{B}(\Gamma), C \subset B_\nu)$

$\Rightarrow$ $U_t\, M(B_\nu)\, \overline{M(B_\nu)}$ ist meßbar bezüglich A_ν.

$A_1, \ldots, A_p$ sind unabhängig.

$\Rightarrow$ $(U_t\, I_p(\varphi_p),\ I_p(\varphi_p)) = \prod_{\nu=1}^{p} (U_t M(B_\nu),\ M(B_\nu)) \in C_o(G)$;

denn es gilt $(U_t\, M(B_\nu),\ M(B_\nu)) \in C_o(G)$ nach Lemma 14, da

$M(B_\nu) \in L((K_t)_{t \in G})$ $\quad (\nu = 1, \ldots, p)$. $\square$

Kapitel II: Die $\bar{\rho}$-Metrik

§ 1 Die Definition der $\bar{\rho}$-Metrik und einige Ergebnisse

Gray, Neuhoff und Shields [3] haben eine Verallgemeinerung der von Ornstein [8] eingeführten $\bar{d}$-Metrik auf stationäre Prozesse mit diskreter Zeit und Werten in einem festen polnischen Raum, dem Alphabet der Prozesse, angegeben. Sie nennen diese Metrik $\bar{\rho}$. Prozesse werden dabei als gleich angesehen, wenn ihre Verteilungen gleich sind.

Bevor $\bar{\rho}$ definiert wird, werden zunächst einige Bezeichnungen aufgeführt: Sei (A,ρ) polnischer Raum (Alphabet der stationären Prozesse) mit Metrik ρ,

$x^n = (x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}) \in A^n$, $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in A^{\mathbb{Z}}$ Bezeichnungen der Elemente von A^n bzw. $A^{\mathbb{Z}}$,

$\rho_n(x^n,y^n) = n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(x_i,y_i)$ eine Metrik auf A^n $(n \in \mathbb{N})$,

$K_n : A^{\mathbb{Z}} \to A$

$x \mapsto x_n$ die n-te Koordinatenabbildung $(n \in \mathbb{Z})$,

$T : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$

$(Tx)_n = x_{n+1}$ $(n \in \mathbb{Z})$ die Shiftabbildung und

$S = \{R : R$ ist stationäres, d.h. T-invariantes, Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(A^{\mathbb{Z}},\mathcal{B}(A)^{\mathbb{Z}})\}$.

Für $R \in S$ und $n \in \mathbb{N}$ sei R^n die Restriktion von R auf $(A^n,\mathcal{B}(A)^n)$, d.h. $R^n = (K_0,K_1,\ldots,K_{n-1})R$, und für $R,R' \in S$ und $n \in \mathbb{N}$ sei

$$P^n_{R,R'} = P^n_{R^n,R'^n} = \{Q^n : Q^n \text{ ist W-Maß auf } ((A^n)^2, (\mathcal{B}(A)^n)^2)$$

mit Marginalverteilungen R^n bzw. R'^n, d.h. $\forall\, B \in \mathcal{B}(A)^n$ gilt $Q^n(B \times A^n) = R^n(B)$ und $Q^n(A^n \times B) = R'^n(B)$}

und

$P_{R,R'}$ = {Q : Q ist stationäres, d.h. T × T-invariantes W-Maß auf $((A^{\mathbb{Z}})^2, (\mathcal{B}(A)^{\mathbb{Z}})^2)$ mit Marginalverteilungen R bzw. R'}.

Definition 1:

$\forall\, R,R' \in S$ und $n \in \mathbb{N}$ sei definiert ([3]):

(1) $$\bar{\rho}_n(R,R') := \bar{\rho}_n(R^n,R'^n) := \inf_{Q^n \in P^n_{R,R'}} \int_{(A^n)^2} \rho_n(x^n,y^n)\, Q^n(dx^n,dy^n),$$

(2) $$\bar{\rho}(R,R') := \sup_{n\in\mathbb{N}} \bar{\rho}_n(R,R')$$

und

(3) $$\bar{\rho}''(R,R') := \inf_{Q\in P_{R,R'}} \int_{(A^{\mathbb{Z}})^2} \rho(x_o,y_o)\, Q(dx,dy).$$

$\bar{\rho}_n, \bar{\rho}$ und $\bar{\rho}''$ haben folgende Eigenschaften ([3]):

(4) $\lim_{n\to\infty} \bar{\rho}_n(R,R')$ existiert und $\lim_{n\to\infty} \bar{\rho}_n(R,R') = \bar{\rho}(R,R')$.

(5) $\bar{\rho}$ ist eine Metrik auf S.

(6) $\bar{\rho} = \bar{\rho}''$.

(7) Die Infima in (1) und (3) sind Minima. Das Maß $Q \in P_{R,R'}$, für das $\bar{\rho}(R,R') = \int_{(A^{\mathbb{Z}})^2} \rho(x_o,y_o)\, Q(dx,dy)$ gilt, ist im Allgemeinen nicht eindeutig. Entsprechendes gilt für $\bar{\rho}_n$. (Siehe Bemerkung nach Lemma 3).

(8) Sei $\tilde{\rho}(x,y) = \frac{1}{2}\,\rho(x_o,y_o) + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}(\rho(x_i,y_i) + \rho(x_{-i},y_{-i}))$ und π die zu $\tilde{\rho}$ gehörende Lévy-Prokhorov-Metrik auf S. Es gilt $\pi \le \sqrt{\bar{\rho}}$. Die schwache Topologie auf S ist also gröber als die von $\bar{\rho}$ induzierte.

(9) Sind R,R' Verteilungen von unabhängigen identisch verteilten Prozessen, so gilt $\bar{\rho}(R,R') = \bar{\rho}_1(R,R')$.

Beweis von (7) und (8):

(7) im Fall (3) (Fall(1) analog)

$\exists$ Folge $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}_{R,R'}$ mit

$\lim_{n\to\infty} \int_{(A^{\mathbb{Z}})^2} \rho(x_o,y_o)\, Q_n(dx,dy) = \bar{\rho}(R,R')$, und $\mathcal{P}_{R,R'}$ ist straff und schwach abgeschlossen, also schwach kompakt.

$\Rightarrow$ $\exists$ Teilfolge $(Q_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $Q \in \mathcal{P}_{R,R'}$
so daß $Q_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} Q$ schwach.

$\Rightarrow$ $\forall\, N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int \rho \wedge N \, dQ_{n_k} = \int \rho \wedge N \, dQ$$

$\Rightarrow$ $\bar{\rho}(R,R') = \lim_{k\to\infty} \int \rho \, dQ_{n_k} \geq \int \rho \wedge N \, dQ \quad \forall\, N \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $\bar{\rho}(R,R') \geq \int \rho \, dQ$ (wegen monotoner Konvergenz)

$\Rightarrow$ $\bar{\rho}(R,R') = \int \rho \, dQ$.

(8) Strassen [12] gibt folgende Darstellung der Lévy-Prokhorov-Metrik an:

$\pi(R,R') = \min \{\varepsilon : \exists$ W-Maß W auf $((A^{\mathbb{Z}})^2, (\mathcal{B}(A)^{\mathbb{Z}})^2)$ mit Marginalverteilungen R bzw. R' so daß $W(\{\tilde{\rho} > \varepsilon\}) \leq \varepsilon\}$.

$\forall\, Q \in \mathcal{P}_{R,R'}$ gilt wegen der Stationarität von Q

$$\int_{(A^{\mathbb{Z}})^2} \rho(x_o,y_o)\, Q(dx,dy) = \int_{(A^{\mathbb{Z}})^2} \tilde{\rho}(x,y)\, Q(dx,dy) \ .$$

Dann liest man unmittelbar die Behauptung ab.

Dobrushin [1] hat die Ungleichung (8) zuerst bewiesen, und zwar für den Wasserstein-Abstand mit der Metrik $\tilde{\rho}$, der kleiner oder gleich dem $\bar{\rho}$-Abstand ist. $\square$

Bemerkung: Ist A abzählbar und $\rho(i,j) = 1-\delta_{i,j}$ $(i,j \in A)$, wobei δ das Kroneckersymbol ist, so spricht man von der $\bar{d}$-Metrik statt von der $\bar{\rho}$-Metrik und von $\bar{d}_n$ statt von $\bar{\rho}_n$.

Satz 2:

(10) Sei $A = \mathbb{R}$ und $\rho(s,t) = |s-t|$.

F und G seien Verteilungsfunktionen.

$$\bar{\rho}(F^{\mathbb{Z}},G^{\mathbb{Z}}) = \int_{\mathbb{R}} |F(x) - G(x)|\,dx \qquad \text{(Vallender [15])}$$

(11) Sei A abzählbar und p,q seien W-Vektoren auf A $(p = (p_i)_{i\in A})$.

$$\bar{d}(p^{\mathbb{Z}},q^{\mathbb{Z}}) = \frac{1}{2} \sum_{i\in A} |p_i - q_i| \qquad \text{(Dobrushin [1])}$$

(12) Sei A abzählbar, $R,R' \in S$ und $R^n(\{i\}) =: R_i^n$ $(i \in A^n)$.

$$\frac{1}{2n} \sum_{i\in A^n} |R_i^n - R_i'^n| \le \bar{d}_n(R,R') \le \frac{1}{2} \sum_{i\in A^n} |R_i^n - R_i'^n| \quad (n \in \mathbb{N})$$

(13) Sei $A = \{0,1\}$, $R,R' \in S$ und $R^2(\{(i,j)\}) =: R^2(i,j)$, $(i,j \in$

$$\bar{d}_2(R,R') = \begin{cases} |R^2(0,1) - R'^2(0,1)| & \text{falls } R^2(0,1) < R'^2(0,1), \\ & \quad R^2(0,0) > R'^2(0,0) \\ & \quad \text{und } R^2(1,1) > R'^2(1,1) \\ & \quad \text{oder umgekehrt} \\ |R^1(\{0\}) - R'^1(\{0\})| & \text{sonst} \end{cases}$$

Zunächst wird ein Lemma bewiesen, mit dessen Hilfe (11) und (12) schnell folgen. Dobrushin beweist (11) auf andere Weise für den Wasserstein-Abstand von W-Maßen auf einem abzählbaren Raum. Der Wasserstein-Abstand ist in diesem Fall dasselbe wie $\bar{d}_1$.

Lemma 3:

Sei M abzählbare Menge, p,q W-Vektoren auf M und $D = \{(i,i) : i \in M\}$. Dann gibt es ein W-Maß W auf $M \times M$

mit Marginalverteilungen p und q, so daß $W(D) = \sum_{i \in M} \min(p_i, q_i)$.

Bemerkung: W hat unter allen W-Maßen auf $M \times M$ mit Marginalverteilungen p und q maximales Maß auf der Diagonalen.

Beweis:

a) Sei M endlich, und $M = \{1, \ldots, n\}$ sei so numeriert, daß

$\{i \in M : p_i \leq q_i\} = \{1, 2, \ldots, k\}$ und

$\{i \in M : p_i > q_i\} = \{k+1, \ldots, n\}$.

$\forall\, r \in \{1, 2, \ldots, n-k\}$ sei

$$k_r = \max \{1 \leq k : \sum_{j=1}^{1} (q_j - p_j) \leq \sum_{i=0}^{r-1} (p_{n-i} - q_{n-i})\} \quad (\max \emptyset := 0),$$

$k_0 := 0$.

$\Rightarrow 0 = k_0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \ldots < k_{n-k} = k$;

denn $k_{n-k} = k$, da $\sum_{j=1}^{k} (q_j - p_j) = \sum_{i=0}^{n-k-1} (p_{n-i} - q_{n-i})$,

und $\forall\, r \in \{1, 2, \ldots, n-k-1\}$ gilt $k_r < k$, da

$\sum_{j=1}^{k} (q_j - p_j) > \sum_{i=0}^{r-1} (p_{n-i} - q_{n-i})$.

Definition von W:

$W(i,i) := \min(p_i, q_i) \quad (i \in M)$

$W(i,j) := 0$ falls $i \neq j$ und $1 \leq i \leq n,\ k+1 \leq j \leq n$

oder $1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq k$

Sei $r \in \{0, 1, \ldots, n-k-1\}$.

Fall I) $k_{r+1} = k_r$

$W(n-r, k_r+1) := p_{n-r} - q_{n-r}$

$W(n-r, j) := 0$ für $k_r + 1 < j \leq k$

Fall II) $k_{r+1} > k_r$

$$W(n-r, k_r+1) := \sum_{j=1}^{k_{r+1}} (q_j - p_j) - \sum_{i=0}^{r-1} (p_{n-i} - q_{n-i})$$

$W(n-r, j) := q_j - p_j$ für $k_r + 1 < j \leq k_{r+1}$

$W(i,j) := 0$ für $k_r+1 \le j \le k_{r+1}$, $k+1 \le i \le n-r-1$;

und falls $k_{r+1} < k$ (also $r < n-k-1$).

$$W(n-r,k_{r+1}+1) := \sum_{i=0}^{r} (p_{n-i} - q_{n-i}) - \sum_{j=1}^{k_{r+1}} (q_j - p_j)$$

$W(n-r,j) := 0$ für $k_{r+1} + 1 < j \le k$.

W hat die Marginalverteilungen p und q:

1) Sei $r \in \{0,1,\ldots,n-k-1\}$.

Fall I) $k_{r+1} = k_r$

$$\sum_{j=1}^{n} W(n-r,j) = q_{n-r} + p_{n-r} - q_{n-r} = p_{n-r}$$

Fall II) $k_{r+1} > k_r$

α) $k_{r+1} = k \Rightarrow r = n - k - 1$

$$\sum_{j=1}^{n} W(k+1,j) = q_{k+1} + \sum_{j=1}^{k_r+1} (q_j - p_j) - \sum_{i=0}^{n-k-2} (p_{n-i} - q_{n-i})$$

$$+ \sum_{j=k_r+2}^{k} (q_j - p_j) = p_{k+1}$$

β) $k_{r+1} < k$

$$\sum_{j=1}^{n} W(n-r,j) = q_{n-r} + \sum_{j=1}^{k_r+1} (q_j - p_j) - \sum_{i=0}^{r-1} (p_{n-i} - q_{n-i})$$

$$+ \sum_{j=k_r+2}^{k_{r+1}} (q_j - p_j) + \sum_{i=0}^{r} (p_{n-i} - q_{n-i}) -$$

$$- \sum_{j=1}^{k_{r+1}} (q_j - p_j) = p_{n-r}$$

2) Sei $j \in \{1,\ldots,k\}$.

$\exists!\ r \in \{0,1,\ldots,n-k-1\}$ so daß $k_r < j \le k_{r+1}$

α) $k_r + 1 < j \le k_{r+1}$

$$\sum_{i=1}^{n} W(i,j) = p_j + q_j - p_j = q_j$$

β) $j = k_r + 1$

β1) $k_r = 0$

$\Rightarrow k_0 = k_1 = \ldots = k_r < k_{r+1}$.

$$\sum_{i=1}^{n} W(i,1) = p_1 + \sum_{i=0}^{r-1} (p_{n-i} - q_{n-i}) + q_1 - p_1 - \sum_{i=0}^{r-1} (p_{n-i} - q_{n-i}) = q_1$$

β2) $k_r > 0$

$\exists!\ s \in \{0,1,\ldots,r\}$ so daß $k_{r-s} < k_{r-s+1} = \ldots = k_r < k_{r+1}$

$$\sum_{i=1}^{n} W(i,k_r+1) = p_{k_r+1} + \sum_{i=n-r-1}^{n-r+s-1} (p_i - q_i) + \sum_{j=1}^{k_r+1} (q_j - p_j) -$$

$$- \sum_{i=0}^{r-1} (p_{n-i} - q_{n-i}) + \sum_{i=0}^{r-s} (p_{n-i} - q_{n-i})$$

$$- \sum_{j=1}^{k_r} (q_j - p_j) = q_{k_r+1}$$

b) Sei M abzählbar, $\mathfrak{C}\ M = \mathbb{N}$.

Zu $\varepsilon > 0$ existiert $N \in \mathbb{N}$, so daß für $K = \{i \in \mathbb{N} : i \leq N\}$ gilt $p(K) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{4}$ und $q(K) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{4}$.

Nun definiert man

$$p^K(B) := \frac{p(B \cap K)}{p(K)} \quad \text{und} \quad q^K(B) := \frac{q(B \cap K)}{q(K)} \qquad \forall\ B \subset \mathbb{N}.$$

Nach a) existiert ein W-Maß W^K auf $K \times K$ mit Marginalverteilungen p^K und q^K, so daß

$$W^K\{(i,i) : i \in K\} = \sum_{i \in K} \min (p_i^K, q_i^K).$$

Damit definiert man das W-Maß

$$W_\varepsilon(C) := p(K)\, q(K)\, W^K(C \cap K^2) + p \times q(C \cap (K^2)^C) \qquad \forall\ C \subset \mathbb{N}^2.$$

W_ε hat die Randverteilungen p und q, denn sei $B \subset \mathbb{N}$, dann ist

$W_\varepsilon(B \times N) = p(K)q(K)\,\frac{p(B\cap K)}{p(K)} + p(B)q(K^C) + p(B\cap K^C)q(K) = p(B)$

und analog $W_\varepsilon(N\times B) = q(B)$.

Ferner ist

$$\sum_{i\in N} W_\varepsilon(i,i) = p(K)q(K) \sum_{i\in K} \min\left(\frac{p_i}{p(K)},\frac{q_i}{q(K)}\right) + \sum_{i\in K^C} p_i\, q_i$$

$$\geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sum_{i\in K} \min(p_i,q_i) \geq \sum_{i\in K} \min(p_i,q_i) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\geq \sum_{i\in N} \min(p_i,q_i) - \varepsilon .$$

N sei mit der diskreten Topologie versehen. $\{W_\varepsilon : \varepsilon > 0\} \subset$ $\{Q : Q$ ist W-Maß auf $N \times N$ mit Marginalverteilungen p und $q\} =: P$. P ist straff und schwach abgeschlossen, also schwach kompakt.

$\Rightarrow$ $\exists$ Folge $(\varepsilon_n)_{n\in N}$ mit $\varepsilon_n > 0$ und $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ und $\exists\, W \in P$ so daß $W_{\varepsilon_n} \underset{n\to\infty}{\to} W$ schwach.

Da D offen und abgeschlossen ist, gilt auch

$\lim_{n\to\infty} W_{\varepsilon_n}(D) = W(D)$, also $W(D) = \sum_{i\in N} \min(p_i,q_i)$. □

Bemerkung: Das W-Maß W ist im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt, da es von der willkürlichen Numerierung in den Mengen $\{i \in M : p_i \leq q_i\}$ und $\{i \in M : p_i > q_i\}$ abhängt.

Beweis von Satz 2, (11), (12), (13):

(11): $\bar{d}(p^{\mathbb{Z}},q^{\mathbb{Z}}) = \bar{d}_1(p,q)$

$$= \inf_{Q^1\in P^1_{p,q}} \int_{A^2} (1 - \delta_{i,j})\, Q^1(di,dj) \text{ nach (6) und (9)}$$

$$= \inf_{Q^1\in P^1_{p,q}} (1 - Q^1(D)) = 1 - \sup_{Q^1\in P^1_{p,q}} Q^1(D)$$

$$= 1 - \sum_{i \in A} \min (p_i, q_i) \quad \text{nach Lemma 3}$$

$$= 1 - \sum_{\substack{i \in A \\ p_i > q_i}} q_i - \sum_{\substack{i \in A \\ p_i \leq q_i}} p_i = \frac{1}{2} \sum_{i \in A} | p_i - q_i | .$$

(12): Die Behauptung folgt aus

$$n^{-1} \inf_{Q^n \in P^n_{R,R'}} \int_{(A^n)^2} (1 - \delta_{i^n, j^n}) \, Q^n(di^n, dj^n)$$

$$\leq \bar{d}_n(R,R') \leq \inf_{Q^n \in P^n_{R,R'}} \int_{(A^n)^2} (1 - \delta_{i^n, j^n}) \, Q^n(di^n, dj^n)$$

und Lemma 3.

(13):

Bis auf Umbenennung des Alphabets $A = \{0,1\}$ und von R, R' gibt es zwei Fälle

I)	II)
$R^2(0,0) > R'^2(0,0)$	$R^2(0,0) \geq R'^2(0,0)$
$R^2(1,1) > R'^2(1,1)$	$R^2(1,1) \leq R'^2(1,1)$
$R^2(0,1) < R'^2(0,1)$	$R^2(0,1) \leq R'^2(0,1)$
$R^2(1,0) < R'^2(1,0)$	$R^2(1,0) \leq R'^2(1,0)$

Man beachte $R^2(0,1) = R^2(1,0)$.

$\forall \, Q^2 \in P^2_{R,R'}$ definiere

$$\bar{Q}^2 := \frac{1}{2} Q^2(\{(i^2, j^2) \in (\{0,1\}^2)^2 : i_0^2 = j_0^2 \text{ und } i_1^2 \neq j_1^2$$

$$\text{oder } i_0^2 \neq j_0^2 \text{ und } i_1^2 = j_1^2\})$$

$$+ Q^2(\{(i, i+1) : i \in \{0,1\}^2\})$$

$$= \frac{1}{2} Q^2(D^C) + \frac{1}{2} Q^2(\{(i, i+1) : i \in \{0,1\}^2\}) \text{ (Addition mod 2).}$$

Es gilt $\bar{d}_2(R,R') = \inf_{Q^2 \in P^2_{R,R'}} \bar{Q}^2$.

$\forall\, Q^2 \in P^2_{R,R'}$ gilt (*) : $\big(Q^2(i,i) =$

$= \min\,(R^2(\{i\}),\ R'^2(\{i\}))\quad \forall\, i \in \{0,1\}^2$

$\Rightarrow \bar{Q}^2 = \bar{d}_2\,(R,R')\big)$.

Fall I):

Für $Q^2 \in P^2_{R,R'}$ mit (*) ist $Q^2(\{(i,i+1) : i \in \{0,1\}^2\}) = 0$

$\Rightarrow\ \bar{Q}^2 = \frac{1}{2}\,Q^2(D^C) = \frac{1}{2}\,(1 - \sum_{i\in\{0,1\}^2} \min\,(R^2(\{i\}),\ R'^2(\{i\})))$

ist minimal.

$\Rightarrow\ \bar{d}_2(R,R') = \frac{1}{4} \sum_{i\in\{0,1\}^2} |\,R^2(\{i\}) - R'^2(\{i\})| = |R^2(0,1) - R'^2(0,1)|.$

Fall II):

$Q^2 \in P^2_{R,R'}$ mit (*) ist eindeutig bestimmt.

Sei $P^2 \in P^2_{R,R'}$.

$$
\begin{aligned}
2\bar{P}^2 &= P^2(D^C) + P^2(\{(i,i+1) : i \in \{0,1\}^2\}) \\
&= Q^2(D^C) + Q^2(D) - P^2(D) + P^2(\{(i,i+1) : i \in \{0,1\}^2\}) \\
&\geq Q^2(D^C) + Q^2(D) - P^2(D) + P^2(\{(\{(0,0),\ (1,1)\})\}) \\
&\geq Q^2(D^C) + Q^2(D) - P^2(D) + R'^2(1,1) - R^2(1,1) \\
&\quad - (Q^2(D) - P^2(D)) = 2\bar{Q}^2
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \bar{d}_2(R,R') = \frac{1}{2}\,(1 - \sum_{i\in\{0,1\}^2} \min\,(R^2(\{i\}),\ R'^2(\{i\})) + R'^2(1,1) - R^2(1,1)\big|
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\,(1 - R'^2(0,0) - R^2(1,1) - R^2(0,1) - R^2(1,0) \\
&\qquad + R'^2(1,1) - R^2(1,1)) \\
&= \frac{1}{2}\,(R'^2(1,1) + R'^2(0,1) + R'^2(1,0) + R'^2(1,1) \\
&\qquad - R^2(1,1) - R^2(0,1) - R^2(1,0) - R^2(1,1)) \\
&= |R^1(\{0\}) - R'^1(\{0\})|. \qquad \square
\end{aligned}
$$

§ 2 Der Abstand gestörter Prozesse

Lemma 4:

Sei E topologischer Raum, und Q W-Maß auf $(E,\mathcal{B}(E))$. Wenn $D = \{(x,x) : x \in E\} \in \mathcal{B}(E)^2$, gibt es genau ein W-Maß Q_D auf $(E^2,\mathcal{B}(E)^2)$, dessen eindimensionale Randverteilungen Q sind, und für das $Q_D(D) = 1$ gilt. $\forall f \in L_1(Q_D)$ gilt

$$\int_{E^2} f(x,y)\, Q_D(dx,dy) = \int_E f(x,x)\, Q(dx).$$

Beweis:

a) Eindeutigkeit

$\forall B,C,B',C' \in \mathcal{B}(E)$ gilt:

$B \cap C = B' \cap C' \Rightarrow Q_D(B\times C) = Q_D(B'\times C')$,

denn $Q_D(B\times C) = Q_D((B\times C) \cap D) = Q_D(((B\cap C) \times (B\cap C)) \cap D)$.

$\Rightarrow Q_D(B\times C) = Q_D((B\cap C) \times E) = Q(B\cap C)$.

b) Existenz

Die Abbildung $g : E \to E^2$

$x \mapsto (x,x)$ ist stetig.

Definiere $Q_D := gQ$.

Die geforderten Eigenschaften von Q_D sind leicht nachzurechnen, und $\int_{E^2} f(x,y)\, Q_D(dx,dy) = \int_E f(x,x)\, Q(dx)$

$\forall f \in L_1(Q_D)$ folgt mit der Transformationsregel. □

Für diesen Paragraphen sei im weiteren A eine additiv geschriebene abelsche topologische Gruppe. $A^{\mathbb{Z}}$ ist mit der Produkttopologie und koordinatenweiser Addition topologische Gruppe. Die Metrik ρ habe folgende Eigenschaft:

(14) $\forall\, x,x',y,y' \in A$ gilt $\rho(x+x',y+y') \le \rho(x,y) + \rho(x',y')$

Bemerkung:

(14) ist zum Beispiel erfüllt, falls

1) A normierter Raum ist (z.B. $A = \mathbb{R}$, $\rho(x,y) = |x-y|$)

2) A abzählbare Gruppe ist, und $\rho(i,j) = 1 - \delta_{i,j}$.

Lemma 5:

Gelte (14). $\forall\, R,R',S \in \mathcal{S}$ gilt

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\overline{\rho}_n(R,R') \ge \overline{\rho}_n(R * S, R' * S)$,

insbesondere $\overline{\rho}(R,R') \ge \overline{\rho}(R * S, R' * S)$.

Beweis:

Sei S_D^n das nach Lemma 4 zu S^n gehörige W-Maß.

$\Sigma : (A^n)^2 \to A^n$

$(x^n,y^n) \mapsto x^n + y^n$ ist stetig.

Sei $Q^n \in P^n_{R,R'}$.

Durch

$Q^n \boxtimes S_D^n(A_1 \times A_2 \times B_1 \times B_2) = Q^n \times S_D^n(A_1 \times B_1 \times A_2 \times B_2)$

$\forall\, A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{B}(A)^n$ sei ein W-Maß auf $((A^n)^4, (\mathcal{B}(A)^n)^4)$ definiert.

$Q^n \boxtimes S_D^n$ hat die Marginalverteilungen $R^n \times S^n$ und $R'^n \times S^n$.

Also hat $(\Sigma \times \Sigma)(Q^n \boxtimes S_D^n)$ die Marginalverteilungen $R^n * S^n$ und $R'^n * S^n$.

Dann ergibt sich

$$\int_{(A^n)^2} n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(x_i,y_i)\ (\Sigma \times \Sigma)(Q^n \boxtimes S_D^n)\ (dx^n,dy^n)$$

$$= \int_{(A^n)^4} n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(x_i+x_i',y_i+y_i')\ Q^n \boxtimes S_D^n(dx^n,dx'^n,dy^n,dy'^n)$$

$$= \int_{(A^n)^4} n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(x_i+x_i',y_i+y_i') Q^n \times S_D^n(dx^n,dy^n,dx'^n,dy'^n)$$

$$\leq \int_{(A^n)^4} n^{-1} \sum_{i=o}^{n-1} (\rho(x_i,y_i)+\rho(x_i',y_i'))Q^n \times S_D^n(dx^n,dy^n,dx'^n,dy'^n)$$

mit (14)

$$= \int_{(A^n)^2} n^{-1} \sum_{i=o}^{n-1} \rho(x_i,y_i)Q^n(dx^n,dy^n)$$

$$+ \int_{(A^n)^2} n^{-1} \sum_{i=o}^{n-1} \rho(x_i,y_i)S_D^n(dx^n,dy^n) .$$

Der zweite Summand ist O. Damit ist das Lemma bewiesen. □

Korollar:

(15) Seien R,R' $S,\bar{S} \in S$ und $n \in \mathbb{N}$, so daß $R^n * \bar{S}^n = R'^n * \bar{S}^n$.

Dann gilt $\bar{\rho}_n(R \times S, R' * S) \leq 2\bar{\rho}_n(S,\bar{S})$.

Falls $R * \bar{S} = R' * \bar{S}$, gilt $\bar{\rho}(R * S, R' * S) \leq 2\bar{\rho}(S,\bar{S})$.

Bemerkung: Wenn A kompakt ist, kann als $\bar{S}$ zum Beispiel das normierte Haarmaß auf $A^{\mathbb{Z}}$ gewählt werden.

(16) Seien $R,R' \in S$ und $\bar{\rho}$ sei endlich.

Die Abbildungen

$f^n_{R,R'}(S^n) = \bar{\rho}_n(R*S,R'*S)$ $(S \in S, n \in \mathbb{N})$ und

$f_{R,R'}(S) = \bar{\rho}(R*S, R'*S)$

sind jeweils bezüglich $\bar{\rho}_n (n\in\mathbb{N})$ bzw. $\bar{\rho}$ gleichgradig gleichmäßig stetig.

Beweis von (15) und (16):

(15) $\bar{\rho}_n(R * S, R' * S) \leq \bar{\rho}_n(R * S, R * \bar{S}) + \bar{\rho}_n(R * \bar{S}, R' * \bar{S})$
$+ \bar{\rho}_n(R' * \bar{S}, R' * S) \leq 2\bar{\rho}_n(S,\bar{S})$ nach Lemma 5 .

(16) $|\bar{\rho}_n(R * S_1,R' * S_1) - \bar{\rho}_n (R * S_2, R' * S_2)|$
$\leq \bar{\rho}_n(R * S_1, R * S_2) + \bar{\rho}_n(R' * S_1, R' * S_2) \leq 2\bar{\rho}_n(S_1,S_2)$
$(S_1,S_2 \in S)$ nach Lemma 5. □

Satz 6:

Es gelte (14) und $\bar{\rho}$ sei endlich.

Seien $R,R', (S_{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \in S$ mit $R \neq R'$. Dann gilt:

$\lim_{k\to\infty} \bar{\rho}(R * S_{(k)}, R' * S_{(k)}) = 0 \Rightarrow$

jede bezüglich $\bar{\rho}$ konvergente Teilfolge von $(S_{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen ein $S \in S$ mit $R * S = R' * S$. Gilt (17):

$\bar{\rho}$ ist beschränkt und $(S_{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ist Teilmenge einer bezüglich $\bar{\rho}$ vollständigen Menge, so ist auch die Umkehrung richtig.

Bemerkung: (17) ist erfüllt, wenn A abzählbar ist, und wenn $(S_{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Verteilungen unabhängig identisch verteilter Prozesse ist.

Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei $(S_{(n_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine gegen $S \in S$ konvergente Teilfolge von $(S_{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$.

$\Rightarrow$ mit (16) $\bar{\rho}(R * S, R' * S) = 0 \Rightarrow R * S = R' * S$.

"$\Leftarrow$" konvergiert $\bar{\rho}(R * S_{(k)}, R' * S_{(k)})$ nicht gegen 0, so $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ und Teilfolge $(S_{(n_k)})_{k\in\mathbb{N}}$, die wegen (17) konvergent gegen $S \in S$ gewählt werden kann, so daß $\forall\, k \in \mathbb{N}$ $\bar{\rho}(R * S_{(n_k)}, R' * S_{(n_k)}) \geq \varepsilon_0$. Wegen (16) kann nicht gelten $R * S = R' * S$. □

Bemerkung: Lemma 5 und Satz 6 können auch für den Wasserstein-Abstand bewiesen werden.

Im Folgenden sollen Störungen bei endlichem Alphabet $A = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ (Addition mod n) diskutiert werden.

Seien p,q,s W-Vektoren auf A, also eindimensionale Randverteilungen von stationären Prozessen.

$$p * s = \sum_{k=o}^{n-1} \Big(\sum_{i=o}^{k} p_i \, s_{k-i} + \sum_{i=k+1}^{n-1} p_i \, s_{n+k-i} \Big) \varepsilon_k ,$$

wobei ε_k die Einheitsmasse in k ist. Für welche s ist nun $p * s = q * s$?

Es gilt $p * s = q * s \quad \Leftrightarrow$

$\forall\, k \in A$ gilt

$$(18)\quad 0 = \sum_{i=o}^{k} (p_i - q_i) s_{k-i} + \sum_{i=k+1}^{n-1} (p_i - q_i) \, s_{n+k-i}$$

$$= \sum_{i=o}^{k} (p_{k-i} - q_{k-i}) \, s_i + \sum_{i=k+1}^{n-1} (p_{n+k-i} - q_{n+k-i}) \, s_i \, .$$

Die Matrix des Gleichungssystems (18) ist

$$C = \begin{pmatrix} p_o - q_o & p_{n-1} - q_{n-1} & p_{n-2} - q_{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & p_1 - q_1 \\ p_1 - q_1 & p_o - q_o & p_{n-1} - q_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & p_2 - q_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n-1} - q_{n-1} & p_{n-2} - q_{n-2} & p_{n-3} - q_{n-3} & \cdot & \cdot & \cdot & p_o - q_o \end{pmatrix}$$

Da $\forall\, n > 1 \quad \bar{s} = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$ Lösung von (18) ist, gibt es genau dann genau eine Lösung von (18), die W-Vektor ist, wenn Rang $C = n-1$. C ist eine zirkulante Matrix.

Sei $\beta(\omega) = p_o - q_o + \sum_{j=1}^{n-1} (p_j - q_j) \, \omega^{n-j} \qquad (\omega \in \mathbf{C})$, und

$\omega_j := \exp(-2\pi i \frac{j}{n}) \quad (j \in A)$ sind die n-ten Wurzeln von 1.

Die Eigenwerte von C sind die $\beta(\omega_j) \quad (j \in A)$, und C ist unitär kongruent zu

$\mathrm{Diag}\,\{\beta(\omega_0), \beta(\omega_1), \ldots, \beta(\omega_{n-1})\}$ (Lancaster [7], Seite 267).

$\Rightarrow$ Rang $C = |\{j \in A : \beta(\omega_j) \neq 0\}|$.

Es gibt also höchstens $|\{j \in A : \beta(\omega_j) = 0\}|$ linear unabhängige Lösungen von (18), die W-Vektoren sind. Die W-Vektoren, die Lösungen von (18) sind, sind dann die konvexen Kombinationen der linear unabhängigen Lösungs-W-Vektoren.

Fall 1): $n = 2$, $p \neq q \Rightarrow$ Rang $C = 1$.

Also ist $\bar{s} = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ der einzige Lösungs-W-Vektor.

$$\bar{d}_1(p * s, q * s) = |(p_o-q_o)s_o + (p_1-q_1)s_1| = |p_o-q_o|\,|s_o-s_1|$$

$$= 2\,|p_o-q_o|\,|s_o-\tfrac{1}{2}| = 2\,\bar{d}_1(p,q)\,\bar{d}_1(s,(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}))\,.$$

Fall 2): $n = 3$, $p \neq q$

$$\text{Rang } C = \text{Rang} \begin{pmatrix} p_o-q_o & p_2-q_2 \\ p_1-q_1 & p_o-q_o \end{pmatrix}$$

$$\text{und } \det \begin{pmatrix} p_o-q_o & p_2-q_2 \\ p_1-q_1 & p_o-q_o \end{pmatrix} = (p_o-q_o)^2 - (p_1-q_1)(p_2-q_2)$$

$$= (p_o-q_o)^2 + (p_1-q_1)^2 + (p_1-q_1)(p_o-q_o) > 0 \Rightarrow \text{Rang } C = 2.$$

Also ist $\bar{s} = (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ der einzige Lösungs-W-Vektor.

Fall 3): $n = 4$

Für $p = (\frac{5}{12}, 0, \frac{1}{6}, \frac{5}{12})$

$q = (\frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{2})$

$s = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

gilt $p * s = q * s$.

Aus Satz 6 folgt:

<u>Korollar:</u>

Für $n \in \{2,3\}$ und für W-Vektoren $p,q,(s_{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ auf A mit $p \neq q$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \bar{d}_1(p * s_{(k)}, q * s_{(k)}) = 0 \iff$$
$$\lim_{k\to\infty} \bar{d}_1 (s_{(k)}, \bar{s}) = 0.$$

§ 3 Berechnung des Abstandes für eine Klasse von Prozessen

In diesem Paragraphen betrachten wir Prozesse, deren Alphabet A $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$ ist.

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ wieder der zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum. Es gelten die gleichen Vorbemerkungen wie in § 2, Kapitel I. Mit $\lim^P$ werden Grenzwerte im quadratischen Mittel bezüglich P bezeichnet.

Definition 7:

Sei $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ Prozeß zweiter Ordnung und $(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ Prozeß. $(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ heißt gleitendes Mittel von $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, wenn
$\forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, (c_\kappa^{(k)})_{|\kappa|\le k} \in \mathbb{C}$ so daß $\forall\, n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$(19)\quad Z_n = \lim_{k\to\infty}^{P} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa^{(k)}\, \xi_{\kappa+n} \quad P\text{-f.ü.}$$

Lemma 8:

$(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sei gleitendes Mittel von $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in der Darstellung (19), dann gilt:

(20) Ist $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ schwach stationär, und hat $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ das Spektralmaß μ, so ist $(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ schwach stationär und hat das Spektralmaß m mit $m \ll \mu$ und

$$\frac{dm}{d\mu}(t) = \Big| \lim_{k\to\infty}^{\mu} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa^{(k)} \exp(2\pi i \kappa t) \Big|^2 \quad \mu\text{-f.ü.}$$

(21) Ist $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ stationär, so ist $(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ stationär.

(22) Ist $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ Gaußsch, so ist $(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ Gaußsch.

(23) $\forall\, n \in \mathbb{Z} : E\,\xi_n = 0 \Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{Z} : E\,Z_n = 0$.

(24) $\forall\, n, l \in \mathbb{Z} : E\xi_l\xi_n = 0 \Rightarrow \forall\, l, n \in \mathbb{Z} : E\,Z_l Z_n = 0$.

(25) Sind $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ und $(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ reellwertig, so gilt $\forall\, n \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{k\to\infty}{}^{P} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa^{(k)}\, \xi_{\kappa+n} = \lim_{k\to\infty}{}^{P} \sum_{|\kappa|\le k} \mathrm{Re}\, c_\kappa^{(k)}\, \xi_{\kappa+n} \quad P\text{-f.ü.}$$

Beweis von (20) und (21):

(20) $\forall\, n \in \mathbb{Z}$ gilt $Z_n \in L_2(P)$.

$\forall\, j, n \in \mathbb{Z}$ gilt $E\, Z_{j+n}\, \overline{Z}_j$

$$= \lim_{k\to\infty} \lim_{l\to\infty} \sum_{|\kappa|\le k} \sum_{|\lambda|\le l} c_\kappa^{(k)}\, \overline{c_\lambda^{(l)}}\, E\, \xi_{\kappa+n}\, \overline{\xi}_\lambda .$$

$\Rightarrow (Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ist schwach stationär.

$\forall\, n \in \mathbb{Z}$ gilt außerdem

$$\int \exp(2\pi i n t)\, m(dt) = E\, Z_n \overline{Z}_0$$

$$= E\Big(\lim_{k\to\infty}{}^{P} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa^{(k)}\, \xi_{\kappa+n}\Big)\, \overline{\Big(\lim_{l\to\infty}{}^{P} \sum_{|\lambda|\le l} c_\lambda^{(l)}\, \xi_\lambda\Big)}$$

$$= \int \Big(\lim_{k\to\infty}{}^{\mu} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa^{(k)}\, \exp(2\pi i(\kappa+n)t)\Big) \cdot \overline{\Big(\lim_{l\to\infty}{}^{\mu} \sum_{|\lambda|\le l} c_\lambda^{(l)}\, \exp(2\pi i \lambda t)\Big)}\, \mu(dt)$$

$$= \int \exp(2\pi i n t) \Big|\lim_{k\to\infty}{}^{\mu} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa^{(k)}\, \exp(2\pi i \kappa t)\Big|^2 \mu(dt) .$$

(21) Man definiert

$$\psi : \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$$

$$z \mapsto \Big(\Big(\lim_{k\to\infty}{}^{\xi P} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa^{(k)}\, K_{\kappa+n}\Big)(z)\Big)_{n\in\mathbb{Z}},$$

dabei sei $\xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, und K_n war die n-te Koordinatenabbildung.

Es gilt $T \circ \psi = \psi \circ T$ ξ P-f.ü., denn $\forall\, n \in \mathbb{Z}$ ist

$$K_n \circ T \circ \psi = K_{n+1} \circ \psi = \lim_{k\to\infty}^{\xi P} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa^{(k)} K_{\kappa+n+1} \quad \text{und}$$

$$K_n \circ \psi \circ T = (\lim_{k\to\infty}^{\xi P} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa^{(k)} K_{\kappa+n}) \circ T$$

$$= \lim_{k\to\infty}^{\xi P} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa^{(k)} K_{\kappa+n+1}, \text{ da } (\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}} \text{ stationär ist.}$$

Sei $B \in \mathcal{B}(\mathbb{C})^{\mathbb{Z}}$. Es ist

$$\{(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in B\} = \{\psi \circ (\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in B\} = \{(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \psi^{-1} B\} \bmod P$$

und

$$\{T \circ (Z_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in B\} = \{T \circ \psi \circ (\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in B\}$$

$$= \{\psi \circ T \circ (\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in B\} = \{T \circ (\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \psi^{-1} B\} \bmod P .$$

Da $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ stationär ist, folgt daraus, daß auch $(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ stationär ist. □

Lemma 9:

Seien $(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ und $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ komplexe (reelle) stationäre Prozesse zweiter Ordnung mit Verteilungen R bzw. Q, so daß $(Z_n - EZ_o)_{n\in\mathbb{Z}}$ gleitendes Mittel von $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ist, d.h.

$$(26) \quad \begin{cases} \forall\, k \in \mathbb{N} \quad \exists\, (c_\kappa^{(k)})_{|\kappa|\le k} \in \mathbb{C} \text{ (bzw. } \mathbb{R}\text{, siehe (25))} \\ \text{so daß} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z} \text{ gilt} \\ Z_n - E\, Z_o = \lim_{k\to\infty}^{P} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa^{(k)} \xi_{\kappa+n} \quad P\text{-f.ü.}, \end{cases}$$

so ist durch

$$(27) \quad \varphi : \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \quad (\text{bzw. } \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}})$$

$$z \mapsto ((\lim_{k\to\infty}^{Q} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa^{(k)} K_{\kappa+n})(z) + E\, Z_o)_{n\in\mathbb{Z}}$$

ein Homomorphismus

von $(\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}(\mathbb{C})^{\mathbb{Z}}, T, Q)$ auf $(\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}(\mathbb{C})^{\mathbb{Z}}, T, R)$ (bzw. von $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}, T, Q)$ auf $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}, T, R)$) definiert.

Beweis:

φ ist meßbar.

1) $\varphi \circ T = T \circ \varphi$ Q-f.ü., denn $\forall\, n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$K_n \circ \varphi \circ T = (\lim_{k\to\infty}{}^{Q} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa^{(k)} K_{\kappa+n} + E\, Z_0) \circ T$$

$$= \lim_{k\to\infty}{}^{Q} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa^{(k)} K_{\kappa+n+1} + E\, Z_0 ,$$

$$K_n \circ T \circ \varphi = K_{n+1} \circ \varphi = \lim_{k\to\infty}{}^{Q} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa^{(k)} K_{\kappa+n+1} + E\, Z_0 .$$

2) $\varphi Q = R$, denn

$$\varphi Q = \varphi \circ (\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}} P = (\lim_{k\to\infty}{}^{P} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa^{(k)} \xi_{\kappa+n} + E\, Z_0)_{n\in\mathbb{Z}} P$$

$$= (Z_n)_{n\in\mathbb{Z}} P = R. \quad \square$$

Lemma 10:

i) Seien m, μ endliche symmetrische Borelmaße auf $\Gamma_0 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $m \ll \mu$. Dann gilt $\frac{dm}{d\mu} \circ \phi = \frac{dm}{d\mu}$ μ-f.ü..

ii) Sei μ endliches symmetrisches Borelmaß auf Γ_0, $f \in L_2(\mu)$ reell und $f \circ \phi = f$ μ - f.ü.. Dann gilt:

$\forall\, k \in \mathbb{N}$ $\exists\, (c_\kappa^{(k)})_{|\kappa|\le k} \in \mathbb{R}$, so daß gilt $f(t) =$

$$\lim_{k\to\infty}{}^{\mu} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa^{(k)} \exp(2\pi i\kappa t) \quad \mu \text{ - f.ü..}$$

Beweis:

i) $\forall\, n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\int \exp(2\pi int)\, m(dt) = \int \exp(-2\pi int)\, m(dt)$$

$$= \int \exp(-2\pi int) \frac{dm}{d\mu}(t)\, \mu(dt) = \int \exp(2\pi int) \frac{dm}{d\mu} \circ \phi(t)\, \mu(dt) .$$

Die erste und die letzte Gleichheit gelten, da m bzw. μ symmetrisch sind.

ii) $\forall\, k \in \mathbb{N}\ \ \exists (b_\kappa^{(k)})_{|\kappa|\le k} \in \mathbb{C}$ so daß

$$f(t) = \lim_{k\to\infty}^{\mu} \sum_{|\kappa|\le k} b_\kappa^{(k)} \exp(2\pi i\kappa t).$$

$$\bar{f} \circ \phi(t) = \lim_{k\to\infty}^{\mu} \sum_{|\kappa|\le k} \overline{b_\kappa^{(k)}} \exp(2\pi i\kappa t), \text{ da}$$

μ symmetrisch ist.

Definiere $c_\kappa^{(k)} := \operatorname{Re} b_\kappa^{(k)}$. □

Ist R Verteilung eines stationären Prozesses zweiter Ordnung $(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, so bezeichnet m_R das Spektralmaß, m_R^o das Spektralmaß des normierten Prozesses $(Z_n - E\,Z_o)_{n\in\mathbb{Z}}$ und $ER := E\,Z_o$.

Definition 11:

Seien R,R' und Q Verteilungen komplexer (reeller) stationärer Prozesse zweiter Ordnung. R und R' heißen Q untergeordnet, wenn es Prozesse $(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $(Z'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ und $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit Verteilungen R,R' bzw. Q gibt, so daß $(Z_n - EZ_o)_{n\in\mathbb{Z}}$ und $(Z'_n - EZ'_o)_{n\in\mathbb{Z}}$ gleitende Mittel von $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in der Darstellung (26) mit $c_\kappa^{(k)}$ bzw. $c_\kappa'^{(k)}$ sind, und dann

$$(28)\quad \Big|\lim_{k\to\infty}^{m_Q} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa^{(k)} \exp(2\pi i\kappa t) - \lim_{k\to\infty}^{m_Q} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa'^{(k)} \exp(2\pi i\kappa t)\Big|$$

$$= \Big|\,\Big|\lim_{k\to\infty}^{m_Q} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa^{(k)} \exp(2\pi i\kappa t)\Big| - \Big|\lim_{k\to\infty}^{m_Q} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa'^{(k)} \exp(2\pi i\kappa t)\Big|\,\Big|$$

m_Q-f.ü. gilt.

Bemerkung: Aus der Darstellung (26) folgt mit (20) $m_R^o \ll m_Q$ und $\sqrt{\frac{dm_R^o}{dm_Q}}(t) = \Big|\lim_{k\to\infty}^{m_Q} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa^{(k)} \exp(2\pi i\kappa t)\Big|$.

Wichtig bei der Darstellung (26) ist, daß die Koeffizienten $c_\kappa^{(k)}$ im Fall reeller Prozesse reell sind. Unabhängig von der Darstellung (26) gibt es immer eine Darstellung

$\sqrt{\frac{dm_R^o}{dm_Q}}(t) = \lim_{k\to\infty}^{m_Q} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa^{(k)} \exp(2\pi i\kappa t)$ (mit nicht notwendig denselben $c_\kappa^{(k)}$ wie oben), und zwar im Falle reeller Prozesse mit reellen Koeffizienten $c_\kappa^{(k)}$ wegen Lemma 10 (Analoges gilt für R'), so daß (28) erfüllt wird.

Lemma 12:

Sei Q die Verteilung eines reellen normierten stationären Gaußschen Prozesses. Die Verteilungen R und R' reeller Prozesse sind genau dann Q untergeordnet, wenn R und R' Verteilungen stationärer Gaußscher Prozesse sind, und $m_R^o,\ m_{R'}^o \ll m_Q$ gilt.

Beweis:

"⇒" R und R' sind Verteilungen stationärer Gaußscher Prozesse nach (21) und (22), und wegen (20) gilt $m_R^o,\ m_{R'}^o \ll m_Q$.

"⇐" Sei $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ Prozeß mit Verteilung Q. Nach Lemma 10 gilt:

$\forall\ k \in \mathbb{N}\quad \exists\ (c_\kappa^{(k)})_{|\kappa|\le k} \in \mathbb{R}$ so daß

$$\sqrt{\frac{dm_R^o}{dm_Q}}(t) = \lim_{k\to\infty}^{m_Q} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa^{(k)} \exp(2\pi i\kappa t).$$

Dann hat der Prozeß

$$Z_n := \lim_{k\to\infty}^{P} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa^{(k)}\ \xi_{\kappa+n} + E\ R$$

die Verteilung R (nach (21), (22) und (23)). Analoges gilt für R'. Also ist (28) erfüllt. □

(29) Folgerung:

Da zu jedem endlichen symmetrischen Borelmaß auf Γ_o ein reeller normierter stationärer Gaußscher Prozeß mit diesem Maß als Spektralmaß existiert (Doob, [2], Seite 72-74), gibt

es zu zwei Verteilungen R und R' reeller stationärer Gaußscher Prozesse immer eine Verteilung Q eines reellen normierten stationären Gaußschen Prozesses, so daß R und R' Q untergeordnet sind.

Lemma 13:

Sei Q die Verteilung eines komplexen normierten stationären Gaußschen Prozesses $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $E\,\xi_l\xi_n = 0 \quad \forall\, l,n \in \mathbb{Z}$. Die Verteilungen R und R' komplexer Prozesse sind genau dann Q untergeordnet, wenn R und R' Verteilungen stationärer Gaußscher Prozesse $(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ und $(Z'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $E\,Z_lZ_n = (E\,Z_o)^2$ und $E\,Z'_lZ'_n = (EZ'_o)^2 \quad \forall\, l,n \in \mathbb{Z}$ sind, und $m^o_R,\ m^o_{R'} << m_Q$ gilt.

Beweis:

Wie Beweis zu Lemma 12, nur wird noch (24) gebraucht. □

(30) Folgerung:

Da zu jedem endlichen Borelmaß auf Γ_o ein normierter stationärer Gaußscher Prozeß $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $E\,\xi_l\xi_n = 0 \quad \forall\, l,n\in\mathbb{Z}$ mit diesem Maß als Spektralmaß existiert (Doob [2], Seite 72-74), ergibt sich dieselbe Konsequenz wie bei Bemerkung (30).

(31) Bemerkung:

Wie im Beweis zu Lemma 12 lassen sich zu jeder Verteilung Q eines reellen stationären Prozesses zweiter Ordnung und $\forall$ reellen $f,g \in L_2(m_Q)$ Verteilungen reeller Prozesse R und R' mit Spektraldichten f^2 bzw. g^2 finden, so daß R und R' Q untergeordnet sind.

Sei $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) definiert durch

$$(s,t) \mapsto |s - t| .$$

$\forall\ R,R' \in S$ ist

$$\overline{\rho^2}(R,R') = \inf_{Q \in P_{R,R'}} \int_{(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}})^2} |x_o - y_o|^2\, Q(dx,dy).$$

$\overline{\rho^2}$ ist zwar keine Metrik, aber erfüllt bis auf die Dreiecksungleichung alle Eigenschaften einer Metrik und definiert deshalb auch eine Topologie auf S.

Außerdem gilt $\overline{\rho} \le \sqrt{\overline{\rho^2}}$. Wegen (8) erhält man eine Abschätzung der zu $\tilde{\rho}$ (siehe (8)) gehörenden Lévy-Prokhorov-Metrik $\pi : \pi(R,R') \le (\overline{\rho^2}(R,R'))^{1/4}$.

Satz 14:

Seien R und R' Verteilungen reeller (komplexer) stationärer Prozesse zweiter Ordnung, für die es eine Verteilung Q eines reellen (bzw. komplexen) stationären Prozesses zweiter Ordnung gibt, so daß R und R' Q untergeordnet sind.

Sei μ endliches Borelmaß auf $\Gamma_o = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, so daß $m_R^o,\ m_{R'}^o << \mu$ gilt.

Dann ist

$$(32)\quad \overline{\rho^2}(R,R') = \int_{\Gamma_o} \left(\sqrt{\frac{dm_R^o}{d\mu}} - \sqrt{\frac{dm_{R'}^o}{d\mu}}\right)^2 d\mu + |ER - ER'|^2.$$

Bemerkung: Der Ausdruck für $\overline{\rho^2}$ ist unabhängig von der Wahl des Maßes $\mu \in \{\nu : m_R^o,\ m_{R'}^o << \nu\}$. Das folgt mit der Kettenregel für Dichten, wenn man beachtet, daß $m_R^o + m_{R'}^o$ minimales Maß in der Menge ist.

Beweis des Satzes:

a) Es wird eine obere Schranke für $\overline{\rho^2}$ ermittelt. Der Beweis wird für $\mathbb{R}$ durchgeführt und ist derselbe wie für $\mathbb{C}$.

Seien R, R' und Q Verteilungen reeller stationärer Prozesse

zweiter Ordnung, so daß R und R' Q untergeordnet sind.

Nach Lemma 9 gibt es Homomorphismen

$\varphi : (\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}, Q, T) \to (\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}, R, T)$ und

$\varphi' : (\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}, Q, T) \to (\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}, R', T)$

der Form (27) mit Koeffizienten $c_\kappa^{(k)}$ bzw. $c_\kappa'^{(k)}$. Sei Q_D das nach Lemma 4 zu Q gehörige W-Maß.

$\overline{Q}_D := (\varphi \times \varphi')\, Q_D$ ist W-Maß auf $((\mathbb{R}^{\mathbb{Z}})^2, (\mathcal{B}^{\mathbb{Z}})^2)$

und $\overline{Q}_D \in P_{R,R'}$, denn

1) $\forall\, B \in \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$ gilt

$$\overline{Q}_D(B \times \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}) = Q_D(\varphi^{-1}B \times \varphi'^{-1}\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}) = Q_D(\varphi^{-1}B \times \mathbb{R}^{\mathbb{Z}})$$
$$= Q(\varphi^{-1}B) = R(B).$$

$\overline{Q}_D(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \times B) = R'(B)$ analog.

2) $\overline{Q}_D$ ist stationär:

$\forall\, B, C \in \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$ gilt

$$\overline{Q}_D(B \times C) = Q_D(\varphi^{-1}B \times \varphi'^{-1}C) = Q(\varphi^{-1}B \cap \varphi'^{-1}C)$$

und

$$(T \times T)\overline{Q}_D(B \times C) = \overline{Q}_D(T^{-1}B \times T^{-1}C) = Q_D(\varphi^{-1}(T^{-1}B) \times \varphi'^{-1}(T^{-1}C))$$
$$= Q(\varphi^{-1}(T^{-1}B) \cap \varphi'^{-1}(T^{-1}C)) = Q(T^{-1}(\varphi^{-1}B) \cap T^{-1}(\varphi'^{-1}C))$$
$$= TQ(\varphi^{-1}B \cap \varphi'^{-1}C) = Q(\varphi^{-1}B \cap \varphi'^{-1}C).$$

Dann ist

$$\overline{\rho^2}(R,R') \le \int_{(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}})^2} |x_o - y_o|^2\, \overline{Q}_D(dx,dy)$$

$$= \int_{(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}})^2} |K_o \circ \varphi(x) - K_o \circ \varphi'(y)|^2\, Q_D(dx,dy)$$

$$\overset{1)}{=} \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}} |K_o \circ \varphi - K_o \circ \varphi'|^2\, dQ$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}} \Big| \lim_{k\to\infty} \sum_{|\kappa| \le k} c_\kappa^{(k)} K_\kappa - \lim_{l\to\infty} \sum_{|\lambda| \le l} c_\lambda'^{(l)} K_\lambda + ER - ER' \Big|^2 dQ$$

$$\overset{2)}{=} \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}} \Big| \lim_{k\to\infty}^{Q} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa^{(k)} K_\kappa - \lim_{l\to\infty}^{Q} \sum_{|\lambda|\le l} c_\lambda'^{(l)} K_\lambda \Big|^2 dQ + |ER-EP'|^2$$

$$\overset{3)}{=} \int_{\Gamma_o} \Big| \lim_{k\to\infty}^{m_Q} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa^{(k)} \exp(2\pi i\kappa t) - \lim_{l\to\infty}^{m_Q} \sum_{|\lambda|\le l} c_\lambda'^{(l)} \exp(2\pi i\lambda t) \Big|^2 m_Q(dt) + |ER - ER'|^2$$

$$\overset{4)}{=} \int_{\Gamma_o} \Big(\sqrt{\frac{dm_R^o}{dm_Q}} - \sqrt{\frac{dm_{R'}^o}{dm_Q}} \Big)^2 dm_Q + |ER - ER'|^2 .$$

Dabei gelten die Gleichheiten

1) wegen Lemma 4 ,

2) da $\int \lim_{k\to\infty}^{Q} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa^{(k)} K_\kappa \, dQ = 0$ (mit ' ebenso) ,

3) wegen des Isomorphismus $L((K_n)_{n\in\mathbb{Z}}, Q) \leftrightarrow L_2(m_Q)$,

4) wegen (28).

b) Daß $\int_{\Gamma_o} \Big(\sqrt{\frac{dm_R^o}{dm_Q}} - \sqrt{\frac{dm_{R'}^o}{dm_Q}} \Big)^2 dm_Q + |ER - ER'|^2$

auch untere Schranke für $\overline{\rho^2}(R,P')$ ist, und zwar für alle stationären Prozesse zweiter Ordnung, wird genauso bewiesen, wie Gray, Neuhoff und Shields [3] es für normierte reelle stationäre Prozesse zweiter Ordnung mit zum Lebesguemaß absolutstetigem Spektralmaß getan haben (siehe Rozanov [10], Seite 19). []

Bemerkung: (32) gilt also zum Beispiel für Prozesse wie sie in Lemma 12 und 13 und in (31) aufgeführt sind. (32) ist für normierte reelle stationäre Gaußsche Prozesse mit bezüglich des Lebesguemaßes absolutstetigem Spektralmaß von Gray, Neuhoff und Shields [3] bewiesen worden. Genauso läßt sich der Beweis für alle normierten reellen stationären Gaußschen Prozesse führen. Gray, Neuhoff und Shields hatten vermutet, daß (32) nur für Gaußsche Prozesse gilt, was durch Satz 14 und Bemerkung (31) widerlegt ist.

Lemma 15:

Die Bezeichnungen seien dieselben wie in Satz 14 und dessen Beweis. Falls Q Verteilung eines Gaußschen Prozesses ist, ist $\overline{Q}_D$ Verteilung eines zweidimensionalen Gaußschen Prozesses, insbesondere gibt es zu Prozessen mit Verteilungen R und R', die einer Gaußschen Verteilung untergeordnet sind (siehe Lemma 12 und 13), eine Gaußsche Verteilung in $P_{R,R'}$, so daß mit dieser Verteilung $\inf_{Q\in P_{R,R'}} \int_{(\mathbb{C}^{\mathbb{Z}})^2} |x_o-y_o|^2 \, Q(dx,dy)$ erreicht wird.

Beweis für komplexe Prozesse:

$Z_n : (\mathbb{C}^{\mathbb{Z}})^2 \to \mathbb{C}$

$(z,z') \mapsto z_n \quad (n \in \mathbb{Z})$

$Z'_n : (\mathbb{C}^{\mathbb{Z}})^2 \to \mathbb{C}$

$(z,z') \mapsto z'_n \quad (n \in \mathbb{Z})$

$\overline{Q}_D$ ist Verteilung eines Gaußschen Prozesses

$\Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}$ ist

$(\operatorname{Re} Z_1,\dots,\operatorname{Re} Z_n, \operatorname{Im} Z_1,\dots, \operatorname{Im} Z_n, \operatorname{Re} Z'_1,\dots,\operatorname{Re} Z'_n, \operatorname{Im} Z'_1,\dots, \operatorname{Im} Z'_n)\, \overline{Q}_D$

Normalverteilung

$\Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, x_1,\dots,x_n,x'_1,\dots,x'_n,\ y_1,\dots,y_n,y'_1,\dots,y'_n \in \mathbb{R}$

ist $f\, \overline{Q}_D$ Normalverteilung (mit

$f = \sum_{i=1}^{n} (x_i \operatorname{Re} Z_i + y_i \operatorname{Im} Z_i + x'_i \operatorname{Re} Z'_i + y'_i \operatorname{Im} Z'_i)$).

Sei $B \in \mathcal{B}$. Es ist

$\overline{Q}_D(B) = Q_D\{(z,z') \in (\mathbb{C}^{\mathbb{Z}})^2 : f(\varphi(z), \varphi'(z')) \in B\}$

$= Q\{z \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : f(\varphi(z), \varphi'(z)) \in B\}$ nach Lemma 4

$= Q\{\sum_{i=1}^{n} (x_i \operatorname{Re} \lim_{k\to\infty}{}^{Q} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa^{(k)} K_{\kappa+i} + y_i \operatorname{Im} \lim_{k\to\infty}{}^{Q} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa^{(k)} K_{\kappa+i}$

$+ x'_i \operatorname{Re} \lim_{k\to\infty}{}^{Q} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa'^{(k)} K_{\kappa+i} + y'_i \operatorname{Im} \lim_{k\to\infty}{}^{Q} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa'^{(k)} K_{\kappa+i}) \in B\}$.

$$\overset{Q}{\lim_{k\to\infty}} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa^{(k)} K_{\kappa+i}, \overset{Q}{\lim_{k\to\infty}} \sum_{|\kappa|\le k} c_\kappa'^{(k)} K_{\kappa+i} \in L((K_n)_{n\in\mathbb{Z}}, Q).$$

Da Q Gaußsche Verteilung ist, ist also auch $\overline{Q}_D$ Gaußsche Verteilung. □

§ 4 Anwendungen von Satz 14

Auf $M(\Gamma_o)$ lassen sich folgende Topologien betrachten:

Sei $m_1, m_2, \mu \in M(\Gamma_o)$ und $m_1, m_2 << \mu$.

1) Durch

$$d_t(m_1,m_2) = \int \left|\frac{dm_1}{d\mu} - \frac{dm_2}{d\mu}\right| d\mu = \left\| \frac{dm_1}{d\mu} - \frac{dm_2}{d\mu} \right\|_{L_1(\mu)}$$

ist eine Metrik auf $M(\Gamma_o)$ definiert. $d_t(m_1,m_2)$ ist die Totalvariation von $m_1 - m_2$. Die von d_t erzeugte Topologie sei $\mathcal{T}_t$.

2) Eine weitere Metrik auf $M(\Gamma_o)$ wird definiert durch

$$d(m_1,m_2) = \left(\int \left(\sqrt{\frac{dm_1}{d\mu}} - \sqrt{\frac{dm_2}{d\mu}}\right)^2 d\mu\right)^{1/2} = \left\| \sqrt{\frac{dm_1}{d\mu}} - \sqrt{\frac{dm_2}{d\mu}} \right\|_{L_2(\mu)}$$

$\mathcal{T}$ sei die von d erzeugte Topologie.

Ferner hat man

3) die schwache Topologie $\mathcal{T}_s$ und

4) die Topologie $\mathcal{T}_g$ der gleichmäßigen Konvergenz der Fouriertransformierten.

Durch die bijektive Zuordnung von symmetrischen Maßen aus $M(\Gamma_o)$ und normierten reellen stationären Gaußschen Prozessen (d.h. Gaußschen Automorphismen) lassen sich die Topologien in $M(\Gamma_o)$ auf diese Prozesse übertragen.

Lemma 16:

Es gilt

$T_s \subsetneq T_g \subsetneq T_t = T$.

Lemma 17:

Sei (X,A,μ) Maßraum.

Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f \in L_2(\mu)$.

Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $L_2(\mu)$, so ist $(f_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $L_1(\mu)$. Gilt $f_n \xrightarrow{L_2(\mu)} f$, so gilt

$f_n^2 \xrightarrow{L_1(\mu)} f^2$ $(n \to \infty)$.

Sind $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f \in L_2^+(\mu)$, so gilt auch die Umkehrung.

Beweis:

1) Seien $a,b \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt

$|a^2 - b^2| - |a - b|^2 = 2 \min\{a,b\}\,|a-b|$; denn

O.E. $a \geq b$ (Symmetrie) und

$|a^2 - b^2| - |a - b|^2 = a^2 - b^2 - (a-b)^2 = 2b(a-b)$.

Also gilt auch für alle nichtnegativen reellen Funktionen f und g

$D(f,g) := |f^2-g^2| - |f-g|^2 = 2 \min(f,g)\,|f-g|$ und damit

$0 \leq D(f,g) \leq 2f|f-g|$.

2) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L_2^+(\mu)$ Cauchyfolge

$\forall\ k, l \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int |f_k^2 - f_l^2|\,d\mu = \int D(f_k,f_l)\,d\mu + \int |f_k-f_l|^2\,d\mu$$
$$\leq 2\int f_k|f_k-f_l|\,d\mu + \int |f_k-f_l|^2 d\mu$$
$$\leq 2\left(\int f_k^2 d\mu\right)^{1/2}\left(\int |f_k-f_l|^2\,d\mu\right)^{1/2} + \int |f_k-f_l|^2 d\mu .$$

Da die Folge $\left(\left(\int f_n^2\,d\mu\right)^{1/2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, folgt die Behauptung für die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L_2^+(\mu)$.

Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L_2(\mu)$, so gilt:

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge (C.F.) in $L_2(\mu)$ $\Rightarrow$
$(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ist C.F. in $L_2(\mu)$ $\Rightarrow$ $(f_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ ist C.F. in $L_1(\mu)$. □

Beweis von Lemma 16:

Seien $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $m \in M(\Gamma_o)$ und

$$\mu := m + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n(\Gamma_o)} \cdot \frac{1}{2^n}\, m_n.$$

a) Da die in 1) bis 4) beschriebenen Topologien metrisch sind, ergibt sich $\mathcal{T}_s \subset \mathcal{T}_g \subset \mathcal{T}_t = \mathcal{T}$ aus Folgendem:

$$m_n \overset{\mathcal{T}}{\to} m$$

$$\Leftrightarrow \int \Big(\sqrt{\frac{dm_n}{d\mu}} - \sqrt{\frac{dm}{d\mu}} \Big)^2 d\mu \to 0$$

$$\overset{\text{Lemma 17}}{\Leftrightarrow} \int \Big| \frac{dm_n}{d\mu} - \frac{dm}{d\mu} \Big| d\mu \to 0$$

$$\Leftrightarrow m_n \overset{\mathcal{T}_t}{\to} m,$$

außerdem gilt $|\hat{m}_n - \hat{m}| \le \int |\frac{dm_n}{d\mu} - \frac{dm}{d\mu}|\, d\mu$, und für kompakte abelsche Gruppen sind die trigonometrischen Polynome dicht in den stetigen beschränkten Funktionen bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz. ([11], Seite 24).

b) $\mathcal{T}_g \not\subset \mathcal{T}_s$, da $\varepsilon_{1/k} \overset{\mathcal{T}_s}{\to} \varepsilon_o$ $(k \to \infty)$,
aber für alle geraden k $|\hat{\varepsilon}_{1/k}(\frac{k}{2}) - 1| = 2$ gilt.
$\mathcal{T} \not\subset \mathcal{T}_g$ folgt aus Satz 18. □

(33) Für $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $m \in M(\Gamma_o)$ mit $m_n \overset{d}{\to} m$ gilt
$m_n(B) \to m(B)$ $(n \to \infty)$ $\forall\, B \in \mathcal{B}(\Gamma_o)$.

Mit R(m) sei die Verteilung eines Gaußschen Automorphismus mit Spektralmaß m bezeichnet.

Abgeschlossene Mengen bezüglich des $\overline{\rho^2}$-Abstandes:

1) Die Gaußschen Automorphismen sind abgeschlossen in der Menge aller stationären reellen Prozesse.

Beweis:

Sei $(R(m_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge von Verteilungen Gaußscher Automorphismen. Dann ist $(R(m_n))_{n\in\mathbb{N}}$ C.F. und $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ C.F. bezüglich d_t (Lemma 17).

$$\mu := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n(\Gamma_o)} \frac{1}{2^n} m_n$$

Damit ist $(\frac{dm_n}{d\mu})_{n\in\mathbb{N}}$ C.F. in $L_1(\mu)$, und es gibt ein $f \in L_1^+(\mu)$ mit $\frac{dm_n}{d\mu} \xrightarrow{L_1(\mu)} f$ $(n \to \infty)$. $f\mu$ ist symmetrisch.
Also gilt $\overline{\rho}^2(R(m_n),R(f\mu)) \to 0$ $(n \to \infty)$. □

2) Sei μ endliches Borelmaß auf Γ_o. Dann ist $\{R(m) : m << \mu\}$ abgeschlossen. (Folgt aus 1) und (33)).

3) Die Gaußschen Bernoullishifts sind abgeschlossen (Folgt aus 2).

4) Die mischenden Gaußschen Automorphismen sind abgeschlossen, da sie in der $\mathcal{T}_g$ entsprechenden Topologie abgeschlossen sind.

5) Die ergodischen Gaußschen Automorphismen sind abgeschlossen. (Folgt aus 1) und (33)).

6) $\forall B \in \mathcal{B}(\Gamma_o)$ ist $\{R(m) : m(B) = 0\}$ abgeschlossen (Folgt aus 1) und (33)).

7) $\{R(m) : m$ ist diskret$\}$ ist abgeschlossen. (Folgt aus 1) und (33)).

Weitere topologische Eigenschaften:

8) $\{R(m) : m$ ist nicht stetig$\}$,d.h. die Menge der nicht ergodischen Gaußschen Automorphismen,ist dicht in der Menge aller Gaußscher Automorphismen.

Beweis:

Sei m Spektralmaß eines Gaußschen Automorphismus.
$\forall n \in \mathbb{N}$ ist $m_n := m + \frac{1}{n}(\varepsilon_s + \varepsilon_{-s})$ $(s \in (0,\frac{1}{2}))$

Spektralmaß eines Gaußschen Automorphismus, und $d_t(m,m_n) = \frac{2}{n}$. □

9) Die Gaußschen Automorphismen sind wegzusammenhängend.

10) Die Gaußschen Automorphismen sind vollständig mit der Metrik $\sqrt{\rho^2}$.

Separabilitätsfragen:

11) Die nicht ergodischen Gaußschen Automorphismen mit Varianz v ($v > 0$) sind nicht separabel.

Beweis:

$\forall\, s \in (0,\frac{1}{2})$ sei $m_s := \frac{v}{2}(\varepsilon_s + \varepsilon_{-s})$. Dann ist $\forall\, s,s' \in (0,\frac{1}{2})$ mit $s \neq s'$

$d_t(m_s,m_{s'}) = 2v$. □

12) Die Gaußschen Bernoullishifts sind separabel, da $L_2(\lambda)$ (λ Lebesguemaß auf Γ_o) separabel ist.

Satz 18:

Die mischenden Gaußschen Automorphismen mit Varianz $v (v > 0)$ sind nicht separabel.

Im Folgenden wird der Beweis von Satz 18 vorbereitet.

Konstruktion der Cantormenge C_α $(0 < \alpha < \frac{1}{2})$:

$C^1_{\alpha,0} := C_{\alpha,0} := [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $C^\nu_{\alpha,n-1}$ $(\nu \in \{1,2,\ldots,2^{n-1}\})$ bereits konstruiert.

Für $\nu \in \{1,2,\ldots,2^{n-1}\}$ sei $C^\nu_{\alpha,n-1} = [a_\nu, b_\nu]$.

Man definiert

$C^{2\nu-1}_{\alpha,n} := [a_\nu, a_\nu + \alpha^n]$

$C^{2\nu}_{\alpha,n} := [b_\nu - \alpha^n, b_\nu]$

$C_{\alpha,n} := \bigcup_{\nu=1}^{2^n} C^\nu_{\alpha,n}$

$C_\alpha := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{\alpha,n}$

Sei μ_α das durch die zu α gehörige Lebesguefunktion auf $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ definierte Maß.

$\forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \forall\, \nu \in \{1,2,\ldots,2^n\}$ gilt $\mu_\alpha(C^\nu_{\alpha,n}) = \frac{1}{2^n}$.

(Zygmund [16], 1, Seite 194ff.)

Lemma 19:

Sei $0 < \beta < \alpha < \frac{1}{2}$ und $N \in \mathbb{N}$ so daß $\alpha^N \leq \frac{\alpha-\beta}{2}$.

Dann gilt $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, \nu \in \{1,2,\ldots,2^n\}$

$\mu_\alpha(C_\beta \cap C^\nu_{\alpha,n}) \leq (1 - \frac{1}{2^N})\, \mu_\alpha(C^\nu_{\alpha,n})$.

Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}$, $\nu \in \{1,2,\ldots,2^n\}$ und $B := [a,b] := C^\nu_{\alpha,n}$.

$K := \max\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \exists\, \kappa \in \{1,2,\ldots,2^k\}$ mit $B \subset C^\kappa_{\beta,k}\}$

$\Rightarrow \beta^K \geq \alpha^n$.

Sei κ so, daß $B \subset C^\kappa_{\beta,K}$.

$C^{2\kappa-1}_{\beta,K+1} =: [\underline{0} - \beta^{K+1}, \underline{0}]$

$C^{2\kappa}_{\beta,K+1} =: [\underline{1}, \underline{1}+\beta^{K+1}]$

Fall 1: $\underline{0}, \underline{1} \notin B \Rightarrow C_\beta \cap B = \emptyset \Rightarrow$ Beh.

Fall 2: $\underline{0} \in B$, $\underline{1} \notin B$

(Der Fall $\underline{0} \notin B$, $\underline{1} \in B$ ist symmetrisch zu Fall 2)

2,1: $b - \underline{0} \geq \frac{\alpha-\beta}{2}\, \alpha^n \Rightarrow b - \underline{0} \geq \alpha^{n+N}$

$\Rightarrow C^{2^N\nu}_{\alpha,n+N} \cap C_\beta = \emptyset \Rightarrow$ Beh.

denn es gilt die Aussage (*):

$\exists\, L \in \{2^N(\nu-1)+1,\ldots,2^N\nu\}$ so daß $C^L_{\alpha,n+N} \cap C_\beta = \emptyset$

$\Rightarrow \mu_\alpha(C_\beta \cap B) = \mu_\alpha(C_\beta \cap (B \setminus C^L_{\alpha,n+N}))$

$\leq \mu_\alpha(B) - \mu_\alpha(C^L_{\alpha,n+N}) = (1 - \frac{1}{2^N})\mu_\alpha(B)$.

2,2: $b - \underline{0} < \frac{\alpha-\beta}{2}\, \alpha^n$

$K_1 := \max\{k \in \mathbb{N} : \exists\, \kappa \in \{1,2,\ldots,2^k\}$ mit $B \subset C^{\kappa}_{\beta,k} \cup [\underline{0},b]\}$

Sei κ_1 so, daß $B \subset C^{\kappa_1}_{\beta,K_1} \cup [\underline{0},b]$

$C^{2\kappa_1-1}_{\beta,K_1+1} =: [\underline{00} - \beta^{K_1}, \underline{00}]$

$C^{2\kappa_1}_{\beta,K_1+1} =: [\underline{01},\underline{0}] \Rightarrow \underline{01} \in B$.

2,2,1: $\underline{00} \notin B$

2,2,1,1: $\underline{01} - a \geq \frac{\alpha-\beta}{2}\alpha^n \Rightarrow (*)$

2,2,1,2: $\underline{01} - a < \frac{\alpha-\beta}{2}\alpha^n$

$\Rightarrow \beta^{K_1+1} + 2\frac{\alpha-\beta}{2}\alpha^n > \alpha^n$.

$C^{4\kappa_1-1}_{\beta,K_1+2} =: [\underline{01},\underline{010}]$

$C^{4\kappa_1}_{\beta,K_1+2} =: [\underline{011},\underline{0}] \Rightarrow \underline{010}, \underline{011} \in B$.

2,2,1,2,1: $a + \alpha^{n+1} \leq \underline{010} < \underline{011} \leq b - \alpha^{n+1}$

$\Rightarrow (1-2\alpha)\alpha^n \geq (1-2\beta)\beta^{K_1+1}$

$> (1-2\beta)\alpha^n - (1-2\beta)(\alpha-\beta)\alpha^n$

$\Rightarrow 2(\alpha-\beta)\alpha^n < (1-2\beta)(\alpha-\beta)\alpha^n$, Wid.!, d.h. der Fall kann nicht eintreten.

2,2,1,2,2: $\underline{010} < a + \alpha^{n+1} \leq \underline{011} \leq b - \alpha^{n+1}$

(der Fall $a + \alpha^{n+1} \leq \underline{010} \leq b - \alpha^{n+1} < \underline{011}$ ist dazu symmetrisch).

$\Rightarrow a + \alpha^{n+1} - \underline{010} \geq (1-2\beta)\beta^{K_1+1} - (1-2\alpha)\alpha^n$

$> (1-2\beta)\alpha^n - (1-2\alpha)\alpha^n - (1-2\beta)(\alpha-\beta)\alpha^n$

$= (1+2\beta)(\alpha-\beta)\alpha^n > (\alpha-\beta)\alpha^n \Rightarrow (*)$

2,2,1,2,3: $\underline{010} < a + \alpha^{n+1} < b - \alpha^{n+1} < \underline{011}$

$\Rightarrow a + \alpha^{n+1} - \underline{010} + \underline{011} - (b - \alpha^{n+1})$

$= (1-2\beta)\beta^{K_1+1} - (1-2\alpha)\alpha^n > (\alpha-\beta)\alpha^n \Rightarrow (*)$

2,2,2: $\underline{00} \in B$

2,2,2,1: $\beta^{K_1} \geq \alpha^n$

2,2,2,1,1: $a' + \alpha^{n+1} \leq \underline{00} < \underline{01} \leq b - \alpha^{n+1}$

$\Rightarrow (1-2\alpha)\alpha^n \geq (1-2\beta)\beta^{K_1} \geq (1-2\beta)\alpha^n$ Wid.!

2,2,2,1,2: $\underline{00} < a + \alpha^{n+1} \leq \underline{01} \leq b - \alpha^{n+1}$

$(a+\alpha^{n+1} \leq \underline{00} \leq b - \alpha^{n+1} < \underline{01}$ ist dazu symmetrisch)

$\Rightarrow a + \alpha^{n+1} - \underline{00} \geq (1-2\beta)\beta^{K_1} - (1-2\alpha)\alpha^n$

$\geq 2(\alpha-\beta)\alpha^n \Rightarrow (*)$

2,2,2,1,3: $\underline{00} < a + \alpha^{n+1} < b - \alpha^{n+1} < \underline{01}$

$\Rightarrow a + \alpha^{n+1} - \underline{00} + \underline{01} - (b - \alpha^{n+1})$

$= (1-2\beta)\beta^{K_1} - (1-2\alpha)\alpha^n \geq 2(\alpha-\beta)\alpha^n \Rightarrow (*)$

2,2,2,2: $\beta^{K_1} < \alpha^n$

$\Leftrightarrow \beta^{K_1+1} < \beta\alpha^n$

$\Rightarrow \beta^{K_1+1} < \alpha^{n+1} \Rightarrow \underline{00} < a + \alpha^{n+1}$

und

$a+\alpha^{n+1} - \underline{00} \geq \alpha^{n+1} - \beta^{K_1+1} > \alpha^{n+1} - \beta\alpha^n = (\alpha-\beta)\alpha^n \Rightarrow (*)$

Fall 3: $\underline{0}, \underline{1} \in B$

3,1: $a + \alpha^{n+1} \leq \underline{0} < \underline{1} \leq b - \alpha^{n+1}$

$\Rightarrow (1-2\alpha)\alpha^n \geq (1-2\beta)\beta^K \geq (1-2\beta)\alpha^n$ Wid.!

3,2: $\underline{0} < a + \alpha^{n+1} < \underline{1} \leq b - \alpha^{n+1}$

(Der Fall $a + \alpha^{n+1} \leq \underline{0} \leq b - \alpha^{n+1} < \underline{1}$ ist dazu symmetrisch)

$\Rightarrow a + \alpha^{n+1} - \underline{0} \geq (1 - 2\beta)\beta^K - (1 - 2\alpha)\alpha^n$

$\geq (1 - 2\beta)\alpha^n - (1 - 2\alpha)\alpha^n = 2(\alpha - \beta)\alpha^n \Rightarrow (*)$

3,3: $\underline{0} < a + \alpha^{n+1} < b - \alpha^{n+1} < \underline{1}$

$\Rightarrow a + \alpha^{n+1} - \underline{0} + \underline{1} - (b - \alpha^{n+1})$

$= (1 - 2\beta)\beta^K - (1 - 2\alpha)\alpha^n \geq 2(\alpha-\beta)\alpha^n \Rightarrow (*)$ []

Lemma 20:

Sei $0 < \beta < \alpha < \frac{1}{2}$. Dann ist $\mu_\alpha(C_\beta \cap C_\alpha) = 0$.

Beweis:

Annahme $\mu_\alpha(C_\beta \cap C_\alpha) > 0$.

Sei $\varepsilon > 0$.

μ_α ist regulär.

$\Rightarrow \exists$ offenes $B \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ mit $C_\beta \cap C_\alpha \subset B$ und

$\mu_\alpha(B - (C_\beta \cap C_\alpha)) < \varepsilon \mu_\alpha(C_\beta \cap C_\alpha)$

$\Rightarrow \mu_\alpha(B) < (1 + \varepsilon)\, \mu_\alpha(C_\beta \cap C_\alpha)$

$\Rightarrow \mu_\alpha(C_\beta \cap C_\alpha) \geq (1 - \varepsilon)\, \mu_\alpha(B)$

$\Rightarrow \mu_\alpha(C_\beta \cap C_\alpha \cap B) > (1 - \varepsilon)\, \mu_\alpha(C_\alpha \cap B)$.

B ist abzählbare disjunkte Vereinigung von (in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$) offenen Intervallen.

$\Rightarrow \exists$ offenes Intervall C, so daß

$\mu_\alpha(C_\beta \cap C_\alpha \cap C) > (1 - \varepsilon)\, \mu_\alpha(C_\alpha \cap C)$.

Wenn ein Randpunkt von C in C_α liegt, ändere man C ab, so daß $\partial C \cap C_\alpha = \emptyset$. Das ist möglich, so daß die obige Ungleichung erhalten bleibt, da C_α totalunzusammenhängend und μ_α stetig ist.

$\Rightarrow \exists\, N \in \mathbb{N}$ so daß $\forall\, l \geq N \quad \partial C \cap \bigcup_{\kappa=1}^{2^l} C^\kappa_{\alpha, l} = \emptyset$

und $\exists\, n \geq N$, so daß

$$\mu_\alpha\Big(C_\beta \cap \bigcup_{\nu=1}^{2^n} C^\nu_{\alpha, n} \cap C\Big) > (1 - \varepsilon)\, \mu_\alpha\Big(\bigcup_{\nu=1}^{2^n} C^\nu_{\alpha, n} \cap C\Big).$$

$\Rightarrow \exists\, \nu \in \{1, 2, \ldots, 2^n\}$ so daß

$\mu_\alpha(C_\beta \cap C^\nu_{\alpha, n} \cap C) > (1 - \varepsilon)\mu_\alpha(C^\nu_{\alpha, n} \cap C)$.

Da $\mu_\alpha(C_\beta \cap C^\nu_{\alpha, n} \cap C) > 0$ und $\partial C \cap C^\nu_{\alpha, n} = \emptyset$,

folgt $C^\nu_{\alpha, n} \subset C$.

$\Rightarrow \mu_\alpha(C_\beta \cap C^\nu_{\alpha,n}) > (1-\varepsilon)\,\mu_\alpha(C^\nu_{\alpha,n})$.

Dies ist ein Widerspruch zu Lemma 19. □

Folgerung:

Die $\mu_\alpha(\alpha \in (0,\frac{1}{2}))$ sind paarweise singulär.

Nach Zygmund [16], 2, Seite 147-152 gilt:

Für überabzählbar viele $\alpha \in (0,\frac{1}{2})$ ist $\lim_{n\to\infty} \hat{\mu}_\alpha(n) = 0$.

Schränkt man noch die Maße μ_α auf Γ_o ein und normiert sie geeignet, so erhält man Satz 18.

Jetzt sollen Störungen behandelt werden:

Lemma 21:

Seien $\mu, m_1, m_2, (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ endliche Maße auf einem Meßraum (X,A) mit $m_1, m_2, (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \ll \mu$. Dann sind äquivalent

i) $\lim_{n\to\infty} \int \left(\sqrt{\frac{dm_1}{d\mu} + \frac{ds_n}{d\mu}} - \sqrt{\frac{dm_2}{d\mu} + \frac{ds_n}{d\mu}}\right)^2 d\mu = 0$.

ii) Auf $\{\frac{dm_1}{d\mu} \neq \frac{dm_2}{d\mu}\}$ konvergiert $(\frac{ds_n}{d\mu})_{n\in\mathbb{N}}$ μ-stochastisch gegen ∞, d.h.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall K \in \mathbb{N} \quad \exists N_{\varepsilon,K} \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_{\varepsilon,K}$:

$\mu(\{\frac{dm_1}{d\mu} \neq \frac{dm_2}{d\mu}\} \cap \{\frac{ds_n}{d\mu} < K\}) < \varepsilon$.

Beweis:

$\forall n \in \mathbb{N}$ definiere $a_n := \left(\sqrt{\frac{dm_1}{d\mu} + \frac{ds_n}{d\mu}} - \sqrt{\frac{dm_2}{d\mu} + \frac{ds_n}{d\mu}}\right)^2$

und $b := \left|\frac{dm_1}{d\mu} - \frac{dm_2}{d\mu}\right|$.

Da $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq b$, gilt

$\lim_{n\to\infty} \int a_n d\mu = 0 \Leftrightarrow$ iii) $\mu\text{-}\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Es wird bewiesen ii) $\Leftrightarrow$ iii).

ii) $\Rightarrow$ iii):

Sei $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$.

1) $\exists\, L \in \mathbb{N} : \mu(\{b > L\}) < \frac{\varepsilon}{2}$

$B := \{0 < b \leq L\}$

$C := \{\frac{dm_1}{d\mu} \neq \frac{dm_2}{d\mu}\}$

2) Es gilt $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \left(\frac{b}{\sqrt{\frac{dm_1}{d\mu} + \frac{ds_n}{d\mu}} + \sqrt{\frac{dm_2}{d\mu} + \frac{ds_n}{d\mu}}} \right)^2 \leq \frac{L^2}{4\,\frac{ds_n}{d\mu}}$$

auf $B \cap \{\frac{ds_n}{d\mu} > 0\}$.

$$\Rightarrow B \cap \{a_n > \delta\} \subset B \cap \left(\{\frac{ds_n}{d\mu} > 0 \text{ und } \frac{L^2}{4\,\frac{ds_n}{d\mu}} > \delta\} \cup \{\frac{ds_n}{d\mu} = 0\}\right)$$

$$= B \cap \{\frac{ds_n}{d\mu} < \frac{L^2}{4\delta}\}.$$

3) $\exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : \mu(C \cap \{\frac{ds_n}{d\mu} < \frac{L^2}{4\delta}\}) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Also ist $\forall\, n \geq N$

$$\mu(\{a_n > \delta\}) = \mu(C \cap \{a_n > \delta\}) \overset{1)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \mu(B \cap \{a_n > \delta\})$$

$$\overset{2)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \mu(B \cap \{\frac{ds_n}{d\mu} < \frac{L^2}{4\delta}\}) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \mu(C \cap \{\frac{ds_n}{d\mu} < \frac{L^2}{4\delta}\}) \overset{3)}{<} \varepsilon .$$

iii) $\Rightarrow$ ii):

Sei $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$

4) $\exists\, r \in \mathbb{N} : \mu(\{0 < t < \frac{1}{r}\}) < \frac{\varepsilon}{3}$

$$\exists\, M \in \mathbb{N} : \mu(\{\sqrt{\frac{dm_1}{d\mu}} + \sqrt{\frac{dm_2}{d\mu}} > M\}) < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$F := \{b \geq \tfrac{1}{r}\} \cap \{\sqrt{\frac{dm_1}{d\mu}} + \sqrt{\frac{dm_2}{d\mu}} \leq M\} \subset C$$

5) Es gilt

$$\sqrt{a_n} = \frac{b}{\sqrt{\frac{dm_1}{d\mu} + \frac{ds_n}{d\mu}} + \sqrt{\frac{dm_2}{d\mu} + \frac{ds_n}{d\mu}}} \geq$$

$$\geq \frac{b}{\sqrt{\frac{dm_1}{d\mu}} + \sqrt{\frac{dm_2}{d\mu}} + 2\sqrt{\frac{ds_n}{d\mu}}}$$

$$\geq \frac{1}{r(M + 2\sqrt{\frac{ds_n}{d\mu}})} \quad \text{auf } F .$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2r\sqrt{a_n}} - \frac{M}{2} \leq \sqrt{\frac{ds_n}{d\mu}} \quad \text{auf } F .$$

$$\Rightarrow F \cap \{\frac{ds_n}{d\mu} < K\} \subset \{a_n > 0 \text{ und } \frac{1}{2r\sqrt{a_n}} - \frac{M}{2} < \sqrt{K}\}$$

$$= \{\sqrt{a_n} > \frac{1}{r(M+2\sqrt{K})}\} .$$

6) $\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_1 : \mu(\{a_n > \frac{1}{r^2(M+2\sqrt{K})^2}\}) < \frac{\varepsilon}{3}$.

$$\Rightarrow \mu(C \cap \{\frac{ds_n}{d\mu} < K\}) \overset{4)}{<} \frac{2}{3}\varepsilon + \mu(F \cap \{\frac{ds_n}{d\mu} < K\})$$

$$\overset{5)}{\leq} \frac{2}{3}\varepsilon + \mu(\{\sqrt{a_n} > \frac{1}{r(M+2\sqrt{K})}\}) \overset{6)}{<} \varepsilon . \quad \square$$

Bemerkungen:

a) Für alle Verteilungen normierter reeller stationärer Prozesse zweiter Ordnung R, R' und S gilt

$$\overline{\rho^2}(R * S, R' * S) \geq \int \left(\sqrt{\frac{dm_R}{d\mu} + \frac{dm_S}{d\mu}} - \sqrt{\frac{dm_{R'}}{d\mu} + \frac{dm_S}{d\mu}}\right)^2 d\mu$$

(mit $m_R, m_{R'}, m_S \ll \mu$).

Daraus ergibt sich:
Nur wenn R und R' so in derselben Weise durch eine Folge von normierten reellen stationären Prozessen zweiter Ordnung gestört werden, daß für die Spektralmaße der Folge die in Lemma 21 ii) angegebene Bedingung gilt, kann man erreichen, daß der Abstand der gestörten Prozesse sehr klein wird. Gaußsche Automorphismen kann man also durch Gaußsche Automorphismen stören, so daß der Abstand klein wird. Zwei Gaußsche Bernoullishifts lassen sich zum Beispiel durch die Folge von Gaußschen Bernoullishifts mit Spektralmaßen $n \cdot \lambda$ ($n \in \mathbb{N}$) (hierzu gehört die Verteilung $N(0,n)^{\mathbb{Z}}$) so stören, daß der Abstand klein wird. Zwei Gaußsche Automorphismen mit Spektralmaßen, deren zu λ singuläre Anteile nicht gleich sind, lassen sich durch eine Folge von Bernoullishifts nicht so stören, daß der Abstand klein wird. Zu zwei verschiedenen normierten reellen stationären Prozessen zweiter Ordnung gibt es keinen dritten, der die beiden so stört, daß der Abstand 0 wird.

b) Notwendig für die Bedingung ii) in Lemma 21 ist:

$$\lim_{n\to\infty} s_n(B) = \infty \quad \forall\, B \in \mathcal{A} \cap \left\{\frac{dm_1}{d\mu} \neq \frac{dm_2}{d\mu}\right\} \text{ mit } \mu(B) > 0.$$

Beweis:

Sei $K \in \mathbb{N}$, $B \in \mathcal{A} \cap \{\frac{dm_1}{d\mu} \neq \frac{dm_2}{d\mu}\}$ mit $\mu(B) > 0$.

$\exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq N : \mu(\{\frac{ds_n}{d\mu} < \frac{2K}{\mu(B)}\} \cap B) < \frac{\mu(B)}{2}$.

$\Rightarrow \forall\, n \geq N$

$$s_n(B) \geq \int_{\{\frac{ds_n}{d\mu} \geq \frac{2K}{\mu(B)}\} \cap B} \frac{ds_n}{d\mu}\, d\mu \geq \frac{2K}{\mu(B)}\, \mu(\{\frac{ds_n}{d\mu} \geq \frac{2K}{\mu(B)}\} \cap B)$$

$$\geq \frac{2K}{\mu(B)}\, (\mu(B) - \frac{\mu(B)}{2}) = K\,. \quad \square$$

c) Aus dem Beweis von Lemma 17 und aus Satz 14 folgt für Verteilungen Gaußscher Automorphismen R, R' und S die Ungleichung (Var R bezeichne dabei die Varianz des Prozesses mit Verteilung R):

$$\overline{\rho^2}(R * S, R' * S) \leq d_t(m_R, m_{R'}) \leq 2(\min(\mathrm{Var}\, R, \mathrm{Var}\, R') + \mathrm{Var}\, S) \cdot (\overline{\rho^2}(R * S, R' * S))^{1/2} + \overline{\rho^2}(R * S, R' * S)\,.$$

und damit

$$\begin{aligned}(d_t(m_R, m_{R'}))^{1/2} &\geq (\overline{\rho^2}(R * S, R' * S))^{1/2} \geq \{d_t(m_R, m_{R'}) + \\ &+ (\min(\mathrm{Var}\, R, \mathrm{Var}\, R') + \mathrm{Var}\, S)^2\}^{1/2} \\ &- \min(\mathrm{Var}\, R, \mathrm{Var}\, R') - \mathrm{Var}\, S \\ &\geq \{\overline{\rho^2}(R, R') + (\min(\mathrm{Var}\, R, \mathrm{Var}\, R') + \mathrm{Var}\, S)^2\}^{1/2} \\ &- \min(\mathrm{Var}\, R, \mathrm{Var}\, R') - \mathrm{Var}\, S\,.\end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

[1] Dobrushin, R.L.: Prescribing a system of random variables by conditional distributions. Theor. Probability Appl., 15 (1970), 458-486.

[2] Doob, J.L.: Stochastic Processes. Wiley, New York (1953).

[3] Gray, M., Neuhoff, D.L., Shields, P.C.: A generalisation of Ornstein's $\bar{d}$-distance with applications to information theory. Ann. Probabilit y, 3 (1975), 315-328.

[4] Halmos, P.R.: Lectures on ergodic theory. Math. Soc. of Japan (1956).

[5] Jacobs, K.: Lecture notes on ergodic theory. Matematisk Institut, Aarhus Universitet, 1 (1962/63).

[6] Jones, L.K.: A generalisation of the mean ergodic theorem in Banach spaces. Z.Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 27 (1973), 105-107.

[7] Lancaster, P.: Theory of matrices. Academic Press, New York (1969).

[8] Ornstein, D.S.: An application of ergodic theory to probability theory. Ann. Probability, 1 (1973), 43-58.

[9] Rohlin, V.A.: Selected topics from the metric theory of dynamical systems. Amer. Math. Soc. Transl., 49 (1966), 171-240.

[10] Rozanov, Yu.A.: Stationary random processes. Holden-Day, San Francisco (1967).

[11] Rudin, W.: Fourier analysis on groups. Interscience Publishers, New York (1962).

[12] Strassen, V.: The existence of probability measures with given marginals. Ann. Math. Statist., 36 (1965) 423-439.

[13] Totoki, H.: Ergodic theory. Matematisk Institut, Aarhus Universitet, Lecture Notes Ser. No. 14 (1970).

[14] Urbanik, K.: Lectures on prediction theory. Springer, Lecture Notes in Mathematics, 44 (1967).

[15] Vallender, S.S.: Calculation of the Wasserstein distance between probability distributions on the line. Theor. Probability Appl., 18 (1973), 784-786.

[16] Zygmund, A.: Trigonometric series. 1 und 2, Cambridge (1959).

Lebenslauf

Am 28.Juni 1947 wurde ich als Sohn des Kaufmanns Wilhelm Gundel und seiner Ehefrau Eva, geb. Müller, in Bremen geboren. Dort wurde ich 1954 eingeschult und besuchte von 1958 an das Gymnasium an der Hermann-Böse-Straße, wo ich am 18.November 1966 meine Reifeprüfung ablegte. Nach 15-monatigem Wehrdienst schrieb ich mich zum Sommersemester 1968 an der Universität Göttingen im Fach Mathematik mit Nebenfach Physik ein. Der Zeitpunkt meiner Vordiplomprüfung war der Beginn des Sommersemesters 1970. Seit meinem 8.Semester beschäftige ich mich hauptsächlich mit Ergodentheorie unter Anleitung von Prof.Dr. U.Krengel. Meine Diplomprüfung für Mathematik legte ich am 8.Februar 1974 ab. Das Thema meiner Diplomarbeit war "Mischungseigenschaften Gaußscher Automorphismen". Auch nach meiner Diplomarbeit arbeitete ich unter Anleitung von Prof.Dr. U.Krengel. Seit dem 1.Juni 1974 erhalte ich ein Promotionsstipendium aufgrund des Graduiertenförderungsgesetzes.
Am 1.Dezember 1972 heiratete ich Edda Gundel, geb. Hüsecken.